

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-  
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
(Сибстрин)

На правах рукописи

Тарасевич Владимир Владимирович

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НАПОРНЫХ  
ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

специальность 05.23.16 – гидравлика и инженерная гидрология

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук

Научный консультант  
Доктор технических наук, профессор,  
действительный член Российской АН

Васильев Олег Фёдорович

Новосибирск – 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа возникла как обобщение ряда исследований реальных гидравлических систем и расчетов практических задач в различных областях напорной трубопроводной гидравлики, проводимых автором с 1969 года и по настоящее время.

Исследования гидравлического удара в сложных гидравлических системах были инициированы в 1969 году в рамках работы по моделированию судоподъемника Красноярской ГЭС, проводимой под руководством профессора (впоследствии – академика) О.Ф.Васильева. Силовой установкой, осуществляемой перемещение судоподъемника, являлся уникальный гидропривод. Колебания давления (гидравлический удар) в гидроприводе, возникающий при торможении и ускорении движения судоподъемника, а также при возможных аварийных ситуациях, весьма интересовали проектировщиков, поскольку были крайне важны для достижения надёжной и устойчивой работы судоподъемника.

Следующим большим объектом исследования были тепловые сети г. Новосибирска. Работы проводились в 1976 – 1980 годах в Новосибирском инженерно-строительном институте (ныне – НГАСУ) под общим научным руководством профессора О.Ф.Васильева. Исследования включали в себя как теоретический анализ и численные расчеты, так и проведение натурных экспериментов на действующих тепловых сетях. Отметим, что результаты экспериментов показали достаточно высокую степень согласования с результатами расчетов и, тем самым, подтвердили достоверность и надёжность как применяемых математических моделей, так и методик расчета.

Накопленный опыт был использован в различные годы при расчетах других гидроприводов – гидропривода машины для литья под давлением (завод «Сиблитмаш»), гидроприводов авиационных испытательных стендов; для расчётов различного вида трубопроводных систем: водовода «Аму-Дарья – Заравшан», напорных оросительных сетей, технологических трубопроводов

АЭС. Проводились расчеты различных достаточно специфических задач: процесс тампонажа скважины, аварийные ситуации в подводном дюкере водоснабжения, в канализационный коллекторе, и др.

Рассмотрение вышеперечисленных практических задач требовало решения ряда теоретических вопросов и различных разработок в области применяемых численных методов. В частности, было рассмотрено явление разрыва сплошности потока при гидравлическом ударе. Был разработан подход, опирающийся на применение моделей с сосредоточенными параметрами, что позволяет организовать быстрый счёт. Диаграмма решаемых автором практических задач и теоретических разработок представлена схематически на рисунке В.1.



Рисунок В.1. Схема развития работ по гидравлическому удару в сложных гидросистемах с 1969 года по настоящее время

**Актуальность** и важность темы работы обусловлена чрезвычайной распространенностью и разнообразием напорных трубопроводных систем. Водопроводные и тепловые сети, магистральные трубопроводы различного назначения, гидроприводы машин и механизмов, системы подачи топлива, нефтепроводы и продуктопроводы, и даже кровеносную систему можно отнести к объектам такого рода.

Напорные трубопроводные системы являются важной частью многих гидротехнических сооружений, строительных машин и механизмов, и других объектов в машиностроении и технике. В состав трубопроводных систем, как правило, входят насосы и исполнительные устройства, клапаны различных видов, фильтры, компенсаторы и другая гидроаппаратура.

Ответственность задач, связанных с трубопроводными системами, предъявляют особые требования к их надежности. От правильного и надежного функционирования трубопроводной системы во многом зависит безопасность объекта, на котором они установлены. Для правильного проектирования и оценки параметров гидравлической системы знание не только статических, но и динамических характеристик процесса для всего диапазона штатных и нештатных (в том числе и аварийных) ситуаций.

Исследования переходных процессов в трубопроводных системах имеют большую важность и актуальность, поскольку они связаны с вопросами обеспечения защиты трубопроводов сети и гидрооборудования от повышенных давлений жидкости (гидравлических ударов). Несмотря на то, что изучением переходных процессов и в частности, гидравлических ударов, занимаются давно, нельзя в настоящее время считать эту проблему полностью решенной. До сих пор в практике эксплуатации трубопроводных систем имеют место различного вида отказы и аварийные ситуации, вызванные гидравлическими ударами, что снижает в целом надежность работы.

Наличие в настоящее время нерешенных вопросов, связанных с

переходными процессами, может быть объяснено рядом причин.

Во-первых, это связано с уникальностью объектов и сложностью их структуры. Такие сооружения, как, например, системы технологических трубопроводов атомных электростанций, или гидропривод красноярского судоподъемника являются уникальными и весьма сложными объектами, которые требуют специального рассмотрения с учетом всей специфики объекта.

Во-вторых, изучение закономерностей переходных процессов в действующих трубопроводных системах наталкивается на большие трудности, связанные с отсутствием всей необходимой для проведения таких расчетов информации. Несмотря на значительное количество работ, посвященных исследованию неустановившихся течений жидкости в трубопроводных системах, практика эксплуатации трубопроводных систем в современных условиях ставит новые гидродинамические задачи, призванные обеспечить надежную эксплуатацию системы при переменных гидравлических режимах.

**Программы и гранты**, в соответствии с которыми выполнялась работа:

1) Координационный план на 1981-1985 гг. важнейших работ вузов по решению научно-технических проблем в области гидротехнического строительства: раздел "Энергетическое оборудование" (№ проблемы 0.01.05 - программа утверждена Постановлением ГК СССР по науке и технике и Госпланом СССР № 472/248 от 12.12.1980 г.),

2) Перспективный план совместных исследований вузов г.Новосибирска с СО АН СССР на 1981-1985 гг. (утверждена академиком Г.И.Марчуком и чл.-корр. АН СССР Ю.И.Бородиным).

3) Грант № 98-21-3.3-150 Министерства Высшего образования (1998), руководитель.

4) Задание министерства на проведение научных исследований (ЕЗН); № государственной регистрации 01.200.108863; «Математическое моделирование гидравлического удара, сопровождающегося кавитацией

потока жидкости»; Новосибирск, 01.01.2001 – 31.12.2002; руководитель.

5) Задание Министерства на проведение научных исследований (ЕЗН); 01.01.2006 – 31.12.2006;

6) Грант по программе «Строительство», раздел 3, направление 3.03; Шифр гранта: № 98-21-3.3-150; «Имитационное моделирование управляющих воздействий как средство повышения надежности и эффективности работы систем теплоснабжения»; код ГАСНТИ: 67.53; руководитель темы; 1999 – 2000 гг. (конкурс грантов 1998 года);

7) Межрегиональная научно-техническая программа "Сибирь" (приказ - распоряжение от 18 февраля 1993 г., № 60/129/1).

8) Федеральная целевая программа "Интеграция науки и высшего образования России на 2002-2006 годы", тема «Математическое моделирование гидродинамических процессов в трубопроводных системах» ответственный исполнитель от НГАСУ.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Опираясь на аппарат теории графов и объектно-ориентированный подход, построить достаточно общее математическое описание трубопроводной системы;
2. В рамках используемой парадигмы разработать: а) достаточно простую инженерную модель гидравлического удара, сопровождающегося кавитацией потока жидкости; б) модель гидравлического удара в системе коаксиальных труб;
3. Разработать эффективные численные достаточно универсальные методы для расчета: а) быстропротекающих процессов со значительными градиентами; б) плавно протекающих процессов; в) течений с кавитацией.
4. На основе моделей с сосредоточенными параметрами разработать упрощенный инженерный подход для описания нестационарных процессов в трубопроводных системах и создать «быстрые» модели и алгоритмы расчета этих процессов.

5. Разработать технологии эквивалентирования и упрощения больших и сложных трубопроводных систем, имитационные модели, позволяющие исследовать функционирование отдельных частей трубопроводной системы.

**Область исследования.** Содержание диссертации соответствует области исследования п.1 «Научные основы равновесия, движения и взаимодействия жидкостей и газов, закономерности движения обычных, взвесенесущих, аэрированных и стратифицированных потоков, прогнозирования их характеристик и кинематической структуры» и п.2 «Стационарные и нестационарные течения жидкости в трубах, каналах, естественных и искусственных руслах, гидротехнических сооружений различного назначения, взаимодействия потоков с обтекаемыми ими граничными поверхностями, телами и сооружениями, гидравлические сопротивления» паспорта специальности 05.23.16 – «Гидравлика и инженерная гидрология».

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач использовались методы математического моделирования, численный эксперимент. Теоретической и методологической основой диссертационного исследования послужили труды отечественных и зарубежных исследователей в области гидравлического удара и трубопроводной гидравлики.

**Научная новизна** диссертационной работы заключается в следующем:

Впервые детально аналитически исследован процесс разрыва сплошности потока на примере гидравлического удара в простом наклонном трубопроводе, без учета трения (идеальная жидкость) и с учетом трения.

Выявлена возможность образования каверны не только у задвижки, но и в средней части потока, при развитии вторичной кавитации; выведены формулы для определения времени зарождения и местоположения этой каверны, определена продолжительность её существования.

Установлено, что для описания процесса кавитации в наклонном трубопроводе без трения и с учетом трения, недостаточно использовать

модель изолированной каверны, так как помимо «крупных» каверн образуется обширная зона мелкопузырьковой кавитации, пульсирующая вместе с прохождением волн гидравлического удара. Модель изолированных каверн применима только для случая горизонтального трубопровода без учета трения, т.е. является вырожденным неустойчивым случаем.

Получена приближенная формула для определения максимального давления в трубопроводе с учетом трения, обобщающая известную формулу Н.Е.Жуковского на случай возникновения кавитации.

В рамках положений теории Н.Е.Жуковского разработана математическая модель гидравлического удара в коаксиальном трубопроводе (наружная и внутренняя труба), учитывающая взаимодействие через стенку внутренней трубы. Установлено, что процесс распространения возмущений в такой системе представляет собой единый связный гиперболический процесс, имеющий две различные скорости распространения возмущений в прямом направлении и две различные скорости в обратном направлении.

Предложена универсальная явно-неявная схема бегущего счета, позволяющая гибко приспособляться к геометрии системы («длинные» и «короткие» трубы).

Предложен оригинальный подход, позволяющий описывать трубопроводную систему как систему с сосредоточенными параметрами. Это позволяет создавать «быстрые» приближенные методы расчета. Предложена методика эквивалентирования трубопроводной системы (или её части).

Предложен оригинальный подход («математический испытательный стенд»), позволяющий достаточно достоверно моделировать и рассчитывать отдельные части трубопроводной системы без привлечения моделирования и расчета остальной части трубопроводной системы.

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов рекомендаций и выводов обеспечивается корректным использованием методов исследования, согласованностью выводов с известными теоретическими

результатами, а также подтверждается сопоставлением решения тестовых задач с известными аналитическими решениями; сопоставлением результатов расчетов с экспериментальными исследованиями.

**Практическая значимость работы.** Полученные в результате работы методики, алгоритмы и программное обеспечение могут применяться во всех прикладных сферах, связанных с расчетами нестационарных режимов трубопроводных систем, как на стадии проектирования, так и на стадии эксплуатации.

**Внедрение результатов.** Результаты работы внедрены в НТП «Трубопровод» (г. Москва), а также, через это предприятие, в ОАО «НИИК», АО Ангарскнефтехимпроект, ООО "Ленгипронефтехим", и др., всего 43 организации (справка о внедрении и список предприятий прилагаются).

Также результаты внедрены в производственную практику ФГУП СибНИА им. С.А.Чаплыгина (справка прилагается).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс НГАСУ (Сибстрин) и РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М.Губкина (справки прилагаются).

**На защиту выносятся** следующие положения:

1. Методика построения математической модели сложной трубопроводной системы в общем виде с использованием элементов объектно-ориентированного подхода
2. Математическая модель гидравлического удара в коаксиальном трубопроводе;
3. Результаты исследований гидравлического удара, сопровождающегося разрывом сплошности потока;
4. Семейство методов расчета на основе схем бегущего счета для быстропротекающих и плавнопротекающих процессов, включая явно- неявную схему.
5. Применение моделей с сосредоточенными параметрами 1-го и 2-го порядка для описания трубопроводных систем.

6. Эквивалентирование больших трубопроводных систем.

7. Технология имитационного моделирования «математический испытательный стенд».

**Личный вклад автора.** Основные результаты, изложенные в работе, получены автором самостоятельно.

**Апробация работы.** Результаты исследований докладывались на многочисленных конференциях, семинарах, как всесоюзных и всероссийских, так и международных.

На XX, XXVIII, XXIX, XXX, XXXI, XXXIV Конгрессах МАГИ (IAHR).

15-th (IMACS) World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics. Berlin, August 1997.

16th IMACS WORLD CONGRESS on Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation, Lausanne, Switzerland, August 21-25, 2000.

International Symposium «Water Industry Systems: modelling and optimization applications», Exeter, UK, 1999.

International Symposium “Water Industry Systems: modelling and optimization applications” (Eds. D.Savic, G.Walters), vol.2, Research Studies Press ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 1999.

International Symposium “Water Network Modelling for Optimal Design and Management”, Eds. G.Walters and D.Savic, Exeter, UK, 11-12 September 2000,

4<sup>th</sup> International Conference on Hydroscience & Engineering - ICHE 2000, Seoul, Korea, September 26-29, 2000.

13<sup>th</sup> IAHR-APD Congress (6-8 August 2002, Singapore).

3<sup>rd</sup> International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics (HEFAT 2004), 21 – 24 June 2004, Cape Town, South Africa.

Всесоюзная конференция по проблемам гидравлической устойчивости (Тбилиси, 19-21 сентября, 1975) - Тбилиси: Груз. политехн. ин-т, 1975.

Всесоюзный симпозиум «Численные методы в гидравлике» (Телави, Груз. ССР, 14-18 апреля 1980) - Ленинград: ВНИИГ, 1980.

II Всероссийский семинар по динамике пространственных и неравновесных течений жидкости и газа (Миасс, 5 - 7 октября 1993 г.).

AMCA-95. Advanced Mathematics, Computations and Applications (Novosibirsk, June 20-24, 1995).

Математические модели и численные методы механики сплошных сред (Россия, Новосибирск, Академгородок, 27 мая - 2 июня 1996г.)//Материалы Международной конференции - Новосибирск, 1996.

ИНПРИМ-96. II Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1996)

Динамика систем, механизмов и машин. II Международная научно-техническая конференция (Омск, ноябрь, 1997)

V Семинар СНГ "Акустика неоднородных сред" Новосибирск, 26 -30 мая 1998.

ИНПРИМ-98. Третий Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященного памяти С.Л. Соболева (1908-1989). Новосибирск, Академгородок, 22 - 27 июня 1998 г.

Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды международной конференции. /Под ред. акад. В.П.Мясникова, акад. Н.А.Кузнецова, проф. В.А.Виттиха. - Самара: Сам. научный центр РАН, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004 гг.

«Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем», Всероссийский научный семинар с международным участием // Иркутск, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008, 2010, 2012, 2016.

Четвертый сибирский конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посвященного памяти М. А. Лаврентьева (1900-1980), Новосибирск, Академгородок, 26 июня - 1 июля 2000 г

**Публикации:** Основные результаты исследований по теме диссертации опубликованы в более чем 40 печатных работах, в том числе в 27 публикациях

в сборниках научных работ, трудах и материалах научных конференций, а также в 13 статьях в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ (из них две зарубежные работы, входящие в базу данных SCOPUS):

1. Г.Я.Мостовщиков, Б.Ф.Ноговицин, В.В.Тарасевич. Гидравлический удар в машинах для литья под давлением. Известия ВУЗов, «Машиностроение», № 3, 1976, с. 126 - 130.
2. В.Л.Лаврентьев, В.В.Тарасевич. Исследование работы системы автоматического регулирования давления в обратной магистрали сети теплоснабжения. Известия ВУЗов, «Строительство и архитектура», № 10, 1977.
3. В.Л.Лаврентьев, В.В.Тарасевич. Исследование работы системы рассечки потока при нестационарных режимах движения жидкости в сети теплоснабжения. Известия ВУЗов, «Строительство и архитектура», № 4, 1980.
4. В.В.Тарасевич О максимальном давлении при гидравлическом ударе, сопровождающемся разрывом сплошности потока. Гидротехническое строительство, № 8, 1980, с. 15 – 18.
5. В.В.Тарасевич Расчет течений двухфазных смесей в системах трубопроводов. // «Вестник Челябинского государственного университета», т.6, № 1, 1997 г., стр. 134-147. Изд. ЧГУ, ISSN: 1994-2796
6. В.В.Тарасевич, Т.Ю.Шероносова. Моделирование работы системы автоматического регулирования давления в обратной магистрали сети теплоснабжения. Изв. ВУЗов. Строительство, 1999, № 8, с. 70 - 74.
7. А.А.Атавин, В.В.Тарасевич. Описание переходных процессов в сложных трубопроводных системах моделями с сосредоточенными параметрами / Вычислительные технологии, 2001, Том 6, часть 2., специальный выпуск (CD-ROM), с.70-75.
8. Тарасевич В.В., Епишева А.К. Математическое моделирование аварийных ситуаций на подводных трубопроводных переходах. Известия

ВУЗов. Строительство, № 5, 2007. с.42 – 48.

9. Тарасевич В.В., Ли А.К. Эффективность обратных клапанов при аварийных режимах канализационного коллектора. Известия вузов. Строительство. 2011 № 10, с. 60-67

10. Тарасевич В.В., Мороз А.А., Ли А.К.. Квазистационарный подход к описанию течения через местное сопротивление, "Известия ВУЗов. Строительство и Архитектура", № 8 - 9, 2011, с. 104 - 111.

11. Podryabinkin E., Tarasevich V., May R. and Ahmed R. Modelling and Evaluating Surge Pressure while Tripping in a Borehole. "Oil Gas European Magazine, March, 2014, volume 40, No 1. pp. 21 - 23.

12. Podryabinkin, Evgeny, Tarasevich, Vladimir, May, Roland and Bocharov, Oleg. "Modelling of Pressure Fluctuations in a Wellbore While Tripping" – European Oil and Gas journal, March, 2016, 03. ), pp. OG 14 – OG 13.

13. Тарасевич, В.В. Расчет распространения и трансформации возмущений в системе технологических трубопроводов АЭС. "Известия ВУЗов. Строительство и Архитектура", № 7, 2016, с. 92 – 98.

В опубликованных работах автору принадлежат результаты, изложенные в тексте диссертации.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, 7 глав основного содержания, заключения, списка литературы и приложений (справки о внедрении). Основное содержание представлено на 222 страницах, включая 1 таблицу, 97 рисунков и список литературы из 229 источников.

#### **Благодарности.**

Автор будет благодарно хранить память об одном из своих научных руководителей, признанном авторитете в области гидравлики, действительном члене Российской АН, д.т.н., профессоре Васильеве Олеге Фёдоровиче, основателе и главе научной школы, к которой автор имеет честь принадлежать, и в рамках которой была выполнена настоящая работа.

Автор выражает огромную благодарность и признательность своему

фактически второму научному руководителю, доценту, старшему научному сотруднику, к.т.н. Атавину Аркадию Анатольевичу за постоянное внимание к работе, ценные советы, неоценимую помощь и многолетнее сотрудничество при выполнении работы на протяжении десятков лет (1968 года и по настоящее время).

Автор выражает благодарность профессору НГАСУ Лаврентьеву В.Л. и другим коллегам с кафедры Гидротехнических сооружений и гидравлики за многолетнюю поддержку и помощь в работе.

## ГЛАВА 1. ОБЗОР И АНАЛИЗ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Исследования переходных процессов в трубопроводных системах имеют большую важность и актуальность, поскольку они связаны с вопросами обеспечения защиты трубопроводов сети и гидрооборудования от повышенных давлений жидкости (гидравлических ударов). Несмотря на то, что изучением переходных процессов и в частности, гидравлических ударов, занимаются давно, нельзя в настоящее время считать эту проблему полностью решенной. До сих пор в практике эксплуатации трубопроводных систем имеют место различного вида отказы и аварийные ситуации, вызванные гидравлическими ударами, что снижает в целом надежность работы [77, 183, 196]. Наличие в настоящее время ряда нерешенных вопросов, связанных с переходными процессами, может быть объяснено рядом причин.

Во-первых, это связано с уникальностью объектов и сложностью их структуры. Такие сооружения, как, например, системы технологических трубопроводов атомных электростанций, или гидропривод красноярского судоподъемника являются уникальными и весьма сложными объектами, которые требуют специального рассмотрения с учетом всей специфики объекта.

Во-вторых, изучение закономерностей переходных процессов в действующих трубопроводных системах наталкивается на большие трудности, связанные с отсутствием всей необходимой для проведения таких расчетов информации.

Несмотря на значительное количество работ, посвященных исследованию неустановившихся течений жидкости в трубопроводных системах, практика эксплуатации трубопроводных систем в современных условиях ставит новые гидродинамические задачи, призванные обеспечить надежную эксплуатацию системы при переменных гидравлических режимах.

Библиография по исследованию трубопроводных систем при нестационарных и нестационарных режимах работы накопила к настоящему

времени сотни, если не тысячи наименований, дать полный обзор которых, хотя бы кратко, в рамках данной работы невозможно. Поэтому более целесообразно будет, классифицировав эти работы по тому или иному признаку, привести примеры основных или типичных работ в рамках каждого направления.

Наиболее естественной представляется классификация по исторически сложившимся отраслям применения трубопроводных систем.

Исходя из такого подхода, можно выделить следующие области исследований гидравлических систем. Наиболее крупными отраслями применения трубопроводных систем будут: водоснабжение, теплоснабжение, атомная энергетика, трубопроводный транспорт, гидропривод. В каждой из этих отраслей, исходя из их специфики, сложился свой круг задач, свои методы исследования и свои подходы к решению задач. Развиваясь во многом изолированно, каждая в своей отрасли, многие результаты дублируют друг друга. Исторически первой отраслью широкого применения напорных трубопроводных систем, по-видимому, следует считать водоснабжение. Именно исследованием на московском водопроводе посвящена знаменитая работа Н.Е.Жуковского о гидравлическом ударе [59], положившая начало целому разделу прикладной гидродинамики, посвященной напорным неустановившимся течениям в трубах. Далее работы в этом направлении развивались в МИИТе [115]; позже одним из «законодателей мод» в расчетах водопроводных сетей стал ВОДГЕО, где долгое время проводились исследования группой Л.Ф.Мошнина [118, 117, 119]. К указанному направлению идейно примыкают исследования в области напорных оросительных систем, активно проводившихся в институтах Гипроводхоз [37] и Росгипроводхоз [155] в 60-80-х годах.

Пожалуй, самый мощный пласт исследований в области трубопроводных систем, которые продолжают наиболее активно расширяться и в настоящее время, связан с энергетикой. Среди них можно выделить отдельные

направления – тепловые сети, атомная энергетика, гидроэнергетика, трубопроводный транспорт (газо- и нефтепроводы, продуктопроводы). Исследованиям гидравлики тепловых сетей активно занимались в ВТИ (работы Зингера, Громова [51] и др.); серьезная школа исследователей сложилась в СЭИ СО АН СССР (ныне ИСЭМ СО РАН) под руководством А.П. Меренкова и В.Я. Хасилева, где была сформирована и активно развивается теория гидравлических цепей [110]. Системами трубопроводов атомных электростанций посвящены работы [83, 72]. Течения в таких системах отличаются наличием значительного теплообмена с внешней средой, возникновением фазовых переходов и разнообразием двухфазных режимов течения, что дало повод для применения специального термина «термогидравлика» [83] или «термогидродинамика» [29] для обозначения предмета исследований. Двухфазные неравновесные потоки, имеющие место в таких системах, относятся к очень обширной, сложной и во многом еще недостаточно исследованной сфере течений многофазных и многокомпонентных сред [125], расчеты которых весьма сложны. Эти течения предъявляет повышенные требования к точности и надежности расчетов. А также к надежности функционирования этих систем, что, в свою очередь, диктует очень жесткие требования к точности и достоверности применяемых моделей и методов расчета. В гидроэнергетике исследованиям напорных течений в водоводах ГЭС посвящены работы [69, 70, 113, 114]. Эти направления активно развивались в ЛПИ (ныне СПбГТУ), МИСИ и других научных центрах. Пожалуй, одной их самых обширных и наиболее активно развивающихся отраслей применения трубопроводных систем и, соответственно, исследований их, является трубопроводный транспорт нефти и газа, и других продуктов. Здесь наблюдается значительно число публикаций и монографий, которые продолжают выходить и по сей день. Исследованиям в этой области посвящены монографии И.А.Чарного [182], М.А. Гусейнзаде, Л.И.Другиной с соавторами [46], М.Г Сухарева и А.М.Карасевича [149], более

ранние работы [2]. Интенсивные исследования в области математического моделирования трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов отражены в работах М.В.Лурье [101, 102]. Можно указать и монографии последних лет (после 2000 г.), выход которых свидетельствует об активной научной деятельности в этом направлении [45, 171].

Весьма обширную зону применения охватывает гидропривод различных машин и механизмов. Исследования здесь бурно развивались в соответствии с ростом и усложнением продукции машиностроения. Лидерами исследований в этой области являются МВТУ им. Н.А. Баумана, МЭИ и другие научные центры. Гидропривод отличается большим разнообразием применяемой гидроаппаратуры (различного вида клапаны, золотники, редукторы, аккумуляторы, распределительные устройства и др.) и насыщенностью различного вида гидроавтоматикой. Можно указать ряд монографий, посвященных вопросам стационарных и нестационарных режимов работы гидропривода [23, 121, 132, 133, 167, 195] и др.

В работах [132, 133] гидросистемами называются технические системы, элементы которых взаимодействуют посредством капельной жидкости. Гидросистемой могут являться несколько соединенных между собой гидравлических устройств или одно устройство, включающее более простые, но взаимосвязанные между собой элементы. В работе [195] гидравлическая система определяется как система передачи энергии, в которой рабочей средой служит капельная жидкость; при этом основной целью гидравлической системы является передача энергии их одного места в другое.

Согласно классификации Д.Н.Попова [133], современные гидросистемы в машиностроении можно подразделить на следующие виды:

- управляющие гидросистемы, используемые в системах управления и регулирования;
- технологические гидросистемы, обеспечивающие рабочие режимы машин, аппаратов, станков и других устройств.

Примерами первого вида гидросистем могут служить гидравлические следящие приводы, гидравлические или пневматические регуляторы. При исследовании нестационарных процессов в таких системах на первое место выступают вопросы моделирования динамики процессов управления и регулирования [140], качество и быстродействие управления, трансформации управляющих сигналов и т.п. Исследованиям такого рода посвящены работы Д.Н.Попова [133], В.Я. Ротача и многие другие. Хотя вопросам гидравлики потоков рабочей жидкости как среды, передающей сигнал, в этих работах уделяется определенное внимание, основной целью исследования являются задачи регулирования и управления. Подобный аспект исследований лежит за рамками задач настоящей работы.

Рассмотрение вопроса с общесистемных позиций, обобщение задачи на трубопроводные системы произвольного вида содержится в работах Н.А.Картвелишвили [70], М.Н.Кулика [85]; но в наиболее абстрактной и обобщенной форме как задачи о нестационарных процессах на графах и сетях, данный аспект разрабатывались в отделе прикладной гидродинамики Института Гидродинамики СО РАН под руководством акад. О.Ф.Васильева (работы С.М.Шугрина, А.Ф. Воеводина, А.А.Атавина и др. [11, 38, 39]).

## 1.2. Гидравлический удар

Отдельные исследования нестационарных напорных течений в трубах проводились еще во второй половине XIX века как в нашей стране [50], так и за рубежом [203]. Однако впервые удобную инженерную теорию для расчета параметров нестационарного процесса в трубопроводе дал Н.Е.Жуковский [59] в своей работе о гидравлическом ударе в трубах. Эта работа Н.Е.Жуковского является классической и не устарела по сей день. Им сформулированы основные положения теории гидравлического удара, приведены дифференциальные уравнения гидравлического удара, изложена методика аналитического расчета и даны решения задачи для некоторых практически

важных случаев; получена достаточно простая формула для оценки ударного давления (т.н. «формула Н.Е.Жуковского»).

Классическая теория Н.Е.Жуковского стала основой многочисленных последующих исследований гидравлического удара. Эта теория опирается на следующие положения.

Жидкость и стенки трубы подчиняются закону Гука, т.е. линейно зависят от изменений давления; малые сечения трубопровода деформируются независимо от соседних; инерцией этих «колечек» пренебрегается; течение жидкости одномерное; трение о стенки не учитывается.

Дальнейшие исследования по части развития теории гидравлического удара по следующим направлениям: 1) более точный учет влияния оболочки; 2) распространение модели на более сложные виды жидкостей (аномальные), неизотермические и двухфазные и многофазные потоки, в частности, на гидравлический удар с разрывом сплошности потока; 3) учет трения, в том числе попытки учесть нестационарное трение.

Модель Н.Е. Жуковского рассматривает поведение стенок трубы как упругое растяжение отдельных сечений независимо друг от друга (т.н. гипотеза Жуковского). Однако в самой работе Н.Е. Жуковского [59] дается более общая постановка, учитывающая инерционность стенок сечения. На основе этой модели в работах [123] изучались структура и характер распространения волн гидравлического удара; волновой процесс в этом случае дает типичную для нелинейных волн картину с появлением предвестников, солитонов и других характерных для нелинейной динамики явлений [31].

Общие уравнения для совместной динамики потока жидкости и оболочки эллиптической формы приведена в работе [69, 70]; показано, что уравнения гидравлического удара является первым (линейным) приближением этих более общих соотношений при малых деформациях для частного случая трубопровода круглого сечения.

### 1.3. Двухфазные парожидкостные потоки. Разрыв сплошности потока.

Усложнение рассматриваемой модели потока развивалось в сторону многофазных и многокомпонентных потоков. Указанная сфера чрезвычайно и велика и разнообразна, обзор работ по этой тематике выходит далеко за рамки работы. Отметим наиболее известные монографии, посвященные указанной теме [28, 73, 83, 88, 125, 129, 174].

Возникновение нестационарных режимов течения опасно не только высокими давлениями, но и низкими, вызывающими в потоке появление зон двухфазного течения (разрыв сплошности потока, кавитация), так как при схлопывании образовавшихся паровых полостей (каверн) могут возникать значительные всплески давления [118, 119, 145]. Кавитация в потоке возникает в различных формах: например, в виде больших полостей (каверн), занимающих все поперечное сечение потока или только его верхнюю часть, в виде мелких пузырьков, распределенных по всему сечению потока, так и по его длине. Возможность появления кавитации в потоке при эксплуатации трубопроводных систем, в частности, сетей теплоснабжения, особенно в нестационарных режимах, достаточно высока [51, 146], т.к. при температуре теплоносителя от  $100^{\circ}$  до  $150^{\circ}$  С давление насыщенных паров колеблется от  $0,1$  до  $0,476$  МПа, что соответствует давлению на многих участках сети при нестационарных режимах движения.

Возникновение в потоке жидкости кавитации в настоящее время объясняется следующими причинами (см. [26, 88, 129]). Реальная жидкость содержит некоторое количество растворенного газа, а также микропузырьки нерастворенного газа (обычно, воздуха). Эти пузырьки скапливаются в микротрещинах оболочек (например, труб) и на поверхности не смачиваемых инородных частиц, содержащихся в любой реальной жидкости, и представляют в таком виде зародыши кавитации. При понижении давления в жидкости до некоторой критической величины (которую можно принять равной давлению насыщенных паров жидкости  $p_s$ , см. [73, 88, 129]), начинается быстрый рост зародышей кавитации за счет выделения в полость

пузырьков паров самой жидкости, а также растворенного в ней газа. При больших температурах теплоносителя это явление будет наблюдаться в форме кипения жидкости. В кавитационных пузырьках, в зависимости от многих обстоятельств, соотношение паров жидкости и других газов (например, воздуха) различно. Здесь будет рассматриваться только такая кавитация, которая образуется за счет паров самой жидкости, то есть паровая кавитация, а содержанием других газов пренебрегается. Вообще говоря, такое предположение справедливо для не сильно аэрированных жидкостей и для таких кавитационных процессов, длительность которых невелика, а результате чего в полость пузырька не успевает выделиться в значительном количестве растворенный в жидкости газ. Нетрудно видеть, что теплоноситель (вода) в сети теплоснабжения достаточно полно отвечает приведенным условиям. Интенсивный рост в жидкости паровых пузырьков (начало кавитации) означает, что данное течение становится двухфазным и представляет собой парожидкостную смесь. Присутствие в потоке пузырьков (каверн) существенно меняет свойства жидкости, в результате чего движение такой смеси не может описываться традиционной системой уравнений гидравлического удара, выведенной для однородной жидкости. Данное обстоятельство говорит о необходимости применения модели нестационарного течения, учитывающего существование в потоке кавитации.

В настоящее время в литературе описано большое число моделей двухфазных течений, к которым относятся течения, сопровождающиеся паровой кавитацией [73, 88, 129, 174, 175]. Вообще говоря, проблемы, возникающие при изучении подобных течений, очень разнообразны и далеко выходят за рамки гидравлического удара [26, 73, 88, 129, 174, 175]. Надо отметить, что сложные и подробные модели, учитывающие динамику и форму пузырьков, наличие растворенного воздуха [73, 109, 129] и т.п., весьма неудобны для проведения массовых инженерных расчетов, во-вторых, потому, что для расчета по этим моделям требуется большое количество

дополнительной информации (исходная концентрация зародышей кавитации в потоке, размеры микропузырьков, наличие и вид примесей и т.п.), получить которые в реальных условиях не всегда возможно. С другой стороны, как показано в [122], подобный учет вышеназванных факторов существенен, в основном, при описании начальной и конечной стадий кавитации, то есть при зарождении и схлопывании каверн, в целом же двухфазное парожидкостное течение с достаточной для инженерных расчетов точностью можно описывать при помощи более простых моделей. Например, при помощи так называемых инерционных моделей кавитации [26]. Такие модели предполагают, что каверны заполнены парами жидкости под постоянным давлением  $p_s$ , а процесс роста или схлопывания каверн определяется, в основном, инерционными свойствами окружающей каверну жидкости.

Настоящая работа ограничивается рассмотрением только инерционных моделей парожидкостного потока. Предпочтение данному классу моделей было отдано в связи с тем, что они наиболее просты и физически ясны и используют только один параметр, характеризующий разрыв сплошности потока – давление насыщенных паров  $p_s$ ; наконец, результаты расчетов, проведенные по этим моделям, достаточно точно совпадают с результатами экспериментов [118, 145, 199, 200].

#### 1.4. Учет трения

Первоначальная постановка Н.Е.Жуковского не учитывала потери на трение в трубопроводе. Позднее, при расчетах на ЭВМ стала активно применяться так называемая гипотеза квазистационарности, согласно которой потери на трение при нестационарном режиме подчиняются тем же зависимостям, что и при нестационарном (Н.А.Картвелишвили [69, 70], И.А.Чарный [182]). Такой подход оправдывает себя при расчетах длинных трубопроводов. Однако часто, особенно при расчетах коротких трубопроводов, заметно влияние частоты колебательного процесса на потери на трение (работы А.Зилке [62], Д.Н. Попова [132]).

В работе [138] проверялась экспериментально гипотеза квазистационарности и подтверждена правомочность её применения.

В работе [134] приведены результаты экспериментальных исследований переходных процессов при движении жидкости в короткой трубе. Авторы предлагают вводить корректив, позволяющий учитывать нестационарность гидравлических сопротивлений.

В работе [127] рассматривается вопрос о правомочности двух различных подходов (использования закона Гука при выводе уравнений гидравлического удара) к учету сжимаемости жидкости при анализе переходных процессов в гидравлических и гидромеханических системах.

Зарубежные исследования по нестационарному трению можно разделить на следующие группы [190]:

- член трения зависит от мгновенных значений скорости течения  $V$  [205];
- член трения зависит от мгновенных значений скорости  $V$  и локального ускорения  $\partial V/\partial t$  [210];
- член трения зависит от мгновенных значений скорости  $V$ , локального ускорения  $\partial V/\partial t$  и мгновенных значений конвективного ускорения  $\partial V/\partial x$  [191];
- член трения зависит от мгновенных значений скорости  $V$  и диффузии  $\partial^2 V/\partial x^2$  [226];
- член трения зависит от мгновенных значений скорости  $V$  и предыстории поведения скорости в данной точке [62, 212, 224, 225]; причем, если первоначально модель предназначалась для ламинарного потока [62, 212, 224], то затем она была расширена и на турбулентный [225]. Из отечественных исследователей здесь можно упомянуть работу Д.Н.Попова [132].
- член трения базируется на распределении по сечению мгновенных значений скорости [227, 206 и др.];

В настоящей работе при учете потерь на трение применяется гипотеза квазистационарности, т.к. рассматривается случай гидросистем с достаточно длинными трубопроводами.

### 1.5. Методы расчета гидравлического удара

Однако формула Н.Е.Жуковского годится только для предварительных оценок максимальных и минимальных давлений в гидросистеме. Для более точной оценки нужно учитывать всю систему трубопроводов гидропривода, совместно с работой разнообразных устройств (клапанов различного типа, насосов, компенсаторов и др.), входящих в состав трубопроводной системы.

Для решения этой задачи первоначально применялись графо-аналитические [25] или операторные методы (работы Л.М. Тарко, И.А.Чарного и др.). Решить подобную задачу аналитически было невозможно без применения значительных упрощающих предположений, в качестве которых, например, использовался линеаризованный закон трения, или трением пренебрегалось вовсе.

В работе Рабиновича [135] предлагается аналитический метода на основе теории 4-х полюсников [60, 131], использующий линеаризацию исходной системы и замену ее эквивалентной схемой с сосредоточенными параметрами.

За рубежом: основные черты гидравлического удара описаны в работах [193, 218, 217].

Стриклер [219] исследовал, в основном, экспериментально эффект так называемой характеристики гидравлического удара  $aV_0/(2gH_0)$

Шнайдер [213] (вслед за Бержероном) давал смешанную теорию с приложениями, активно применял графический метод для расчетов гидравлического удара в системе с насосами и клапанами. Его ключевая работа [214] излагает графоаналитический метод; значительный вклад внес Ангус [186].

Джагер развивал как графоаналитические методы [198], так и в основном аналитические [197], причем для расчета трубопроводных систем (из трех труб и уравнительного резервуара) он применял коэффициенты отражения волн (аналогично работам В.И.Блохина [27]).

Л. Аллиев [185] и Л. Бержерон [25] разработали практически удобные аналитический (в виде рекуррентных «цепных» уравнений) и графический метод решения задач гидравлического удара.

Основная масса работ посвящена расчетам тех или иных конкретных трубопроводных систем. В основном, разрабатывались математические модели тех или иных устройств, выступающих в качестве граничных условий и методики расчета, однако сама модель течения оставалась со времен Жуковского неизменной.

В работе И.И. Куколевского [84] излагается применение графических методов для расчета волновых процессов в турбинных и насосных установках.

Теория гидравлического удара получила значительное развитие применительно к анализу работы гидроэлектрических станций в работах М.А.Мосткова [113, 114], Н.А.Картвелишвили [69, 70], Г.И.Кривченко [80], А.Е.Жмудь [58].

В книге А.А.Сурина [148] уделено внимание учету гидравлических сопротивлений при гидравлических ударах и приведен анализ противоударных устройств. И.А.Чарный в монографии [182] излагает теорию неустановившегося движения реальной жидкости в трубах, на основе линеаризованной зависимости потерь напора на трения от средней скорости течения.

Г.Г.Калиш, А.И.Долбин и Ю.В.Крылов [82] провели анализ волновых процессов в гидравлических системах с местными объемами на концах трубопроводов. Анализ явлений гидравлического удара в гидропрессах проведен Б.В.Розановым и Н.С.Добринским [55]. В работах Л.М.Тарко [167] исследованы волновые процессы в различных системах гидропривода.

В работе [34] приводится пример расчета при помощи метода характеристик динамики разветвленной гидросистемы, включающей в себя аксиально-поршневой насос, напорный трубопровод и различные гидроустройства.

В работах [25] применялся метод характеристик для расчетов гидравлического удара в гидроприводе. Как отмечалось в работах отечественных [116] и зарубежных авторов [194], применение классического метода характеристик в случае трубопроводных систем приводит либо к непроизводительным затратам вычислительных ресурсов, либо к потере точности и заметным искажениям решения. Более удобен в этом случае метод бегущего счета, представленный в монографии Б.Л.Рожественского и Н.Н.Яненко [137]. Расчет на ЭВМ нестационарных процессов в гидроприводе Красноярского судоподъемника при условии «замороженного» судна осуществил А.К.Войнов [40]. Им была использована явная схема бегущего счета с аппроксимацией правой части по нижнему временному слою. Такая аппроксимация неудобна тем, что налагает дополнительные ограничения на шаг по времени, связанные с устойчивостью по правой части.

В работе [211] также предлагается явный конечно-разностный метод, представляющий собой модификацию метода характеристик. Правая часть дифференциальных уравнений здесь аппроксимируется также по нижнему слою по времени.

Изучению гидропривода такого уникального гидротехнического сооружения как Красноярский судоподъемник посвящены работы О.Ф.Васильева [12], А.К.Войнова [40], А.А.Атавина и др.

В работе [209] приводятся результаты экспериментальных исследований влияния различного рода сопротивлений на движение волн гидравлического удара.

В монографии А.А. Атавина, О.Ф. Васильева и А.П. Яненко [12] приводится другой подход к решению указанной задачи, когда для расчетов колебательных процессов в гидроприводе используется модель с сосредоточенными параметрами, но учитываются связанные колебания воды и судна в камере судоподъемника при его движении.

В работе [220] дается постановка задачи о переходных гидравлических процессах в напорной системе. Применяя различные упрощения, выводится аналитическая (весьма громоздкая) зависимость, позволяющая оценить параметры потока.

Методика расчета гидравлического удара с учетом срабатывания обратных клапанов рассмотрена в работе [141].

#### 1.6. Гидравлические расчеты трубопроводных систем.

Наиболее распространенной является ситуация, когда в качестве начальных данных для нестационарной задачи выступают параметры стационарного процесса, предшествующего нестационарному процессу (т.н. переходный процесс). В данном случае речь должна идти о согласованном гидравлическом расчете, поскольку в результате такого расчета должны быть определены параметры не только течений в трубах, но и параметры узлов. Задачи о согласованном гидравлическом расчете предъявляют дополнительные требования к гидравлическому расчету, ввиду чего многие методики такого расчета оказываются неудовлетворительными.

Работ, посвященных гидравлическим расчетам трубопроводных систем, т.е. расчетам установившихся режимов течения, весьма большое количество. Особенно сложными являются расчеты больших трубопроводных сетей, содержащих закольцованные участки. До появления ЭВМ эти расчеты (увязка трубопроводной сети) проводились вручную и были весьма трудоемки. Наиболее часто применялись методы Лобачева, Кросса [1], Андрияшева [6]. Эти методики носили во многом эвристический характер и не имели строгого обоснования. Значительный прорыв в этом направлении произошел с появлением работ по теории гидравлических цепей [110].

#### 1.7. Упрощенные модели и декомпозиция больших систем

Проблема эквивалентизации больших трубопроводных систем применительно к гидравлическому расчету рассматривалась в работе [149], в

теории гидравлических цепей [110] и др. Однако применительно к нестационарным процессам таких исследований практически не проводилось.

Задачи оптимального управления работой трубопроводной системы диктуют необходимость поведения быстрых оценочных расчетов различных вариантов управления в режиме реального времени; для проведения таких расчётов требуется наличие «быстрых» моделей. Такие модели возможно построить на применении моделей с сосредоточенными параметрами. Такой подход представляется весьма перспективным, однако в специальной литературе практически не представлен.

## ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ В ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

### 2.1. Трубопроводные системы

Под трубопроводной системой будем понимать совокупность напорных трубопроводов, соединенных между собой произвольным образом. В местах соединения трубопроводов, называемых узлами системы, могут быть расположены насосы, клапаны и другие устройства. Примерами таких систем могут служить водопроводные сети, системы магистральных газо- и нефтепроводов, тепловые сети и т.д.

Структура такой системы задается ориентированным связным графом. Течение жидкости в каждой трубе описывается уравнениями типа уравнений гидравлического удара. В случае необходимости рассмотрения термических свойств жидкости (или газа) к этим уравнениям добавляются уравнение энергии и соответствующие замыкающие соотношения. Функционирование узлов сети описывается системой алгебраических и/или обыкновенных дифференциальных уравнений. В итоге проблема сводится к решению смешанной задачи для системы гиперболических уравнений, определенных на графе (комплексе) [38, 39].

В качестве начальных значений часто выступают параметры стационарного потока в трубопроводной системе (так называемые переходные процессы, когда происходит изменение режима течения от одного стационарного режима до другого).

#### 2.1.1. Описание структуры трубопроводной системы

Пусть  $\Gamma$  – ориентированный граф [180] структуры системы [128], где вершины соответствуют узлам системы, а дуги – трубам. Пусть вершины и ребра  $\Gamma$  пронумерованы, и  $i$  и  $j$  – номера ребер и вершин, соответственно.

Условимся обозначать нижним индексом  $i$  величины, относящиеся к  $i$ -тому ребру (трубе), и верхним индексом  $j$  – величины, относящиеся к  $j$ -той

вершине (узлу). Пусть  $N$  – множество номеров ребер графа  $\Gamma$  (т.е. множество номеров труб системы), а  $J$  – множество номеров вершин графа  $\Gamma$  (узлов системы).

Будем считать, что определено понятие расстояния вдоль ребра и, соответственно, для каждого ребра определена его длина  $L$ . Пусть параметр  $x$  означает расстояние от начала ребра (в соответствии с ориентацией ребра). Модифицированный таким образом граф  $\Gamma$  можно рассматривать как обобщение оси  $x$  [38, 39, 153], причем ориентация ребер будет определять положительное направление оси  $x$ .

Итак, пространственная область определения задается неравенствами

$$0 \leq x \leq L_i, \quad i \in N. \quad (2.1)$$

Для нестационарных задач задается область изменения параметра  $t$  (время):

$$0 \leq t \leq T_{gl}, \quad (2.2)$$

где  $T_{gl}$  – расчетное время изучаемого процесса.

Определим функцию инцидентности графа  $\Gamma$  (см. рис. 2.1.):

$$\eta_i^j = \begin{cases} +1, & \text{если дуга (труба) } i \text{ входит в вершину (узел) } j; \\ -1, & \text{если дуга } i \text{ выходит из вершины } j, \\ 0, & \text{если ребро } i \text{ не связано с вершиной } j; \end{cases} \quad (2.3)$$

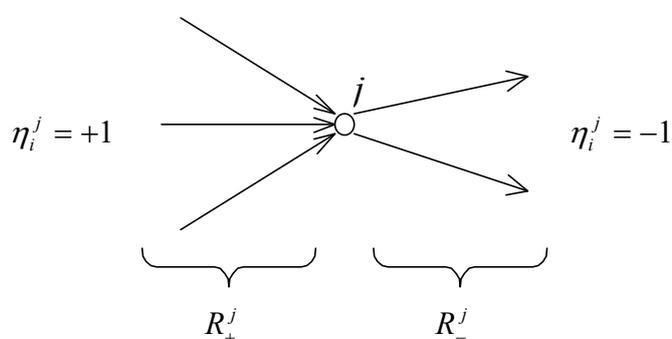


рис. 2.1.

Обозначим через  $R^j$  – множество номеров ребер, примыкающих к вершине  $j$ ,  $R_+^j$  – множество номеров ребер, входящих в вершину  $j$ ,  $R_-^j$  – множество номеров ребер, выходящих из вершины  $j$ :

$$R_+^j = \{i \in N \mid \eta_i^j = 1\}, \quad R_-^j = \{i \in N \mid \eta_i^j = -1\}, \quad R^j = R_+^j \cup R_-^j \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Параметры, определенные на графе (комплексе)

Параметры, относящиеся к  $i$ -той трубе, при необходимости будут снабжаться нижним индексом  $i$ ; параметры, относящиеся к узлу  $j$ , будут при необходимости снабжаться верхним индексом  $j$ .

Пусть, например, некоторая величина  $Y$  определена для  $i$ -той трубы; допустим, эта труба (началом или концом) примыкает к узлу  $j$  (т.е.  $i \in R^j$ ). Тогда значения  $Y_i$  в точке примыкания будут обозначаться как  $Y_i^j$ .

Там, где это очевидно, индексы будут опускаться, чтобы не загромождать изложение.

## 2.2. Дифференциальные уравнения, описывающие течение жидкости в трубах.

### 2.2.1 Уравнение неразрывности.

Исходя из интегрального закона сохранения массы, можно получить уравнение неразрывности в следующем виде [182]:

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (2.5)$$

где  $t$  – время;  $x$  – координата вдоль трубы;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\omega$  – площадь поперечного сечения трубы;  $G$  – массовый расход.

### 2.2.2 Уравнение движения

Из интегрального закона сохранения импульса следует уравнение [182]:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial(VG)}{\partial x} + \omega \frac{\partial p}{\partial x} = -\tau \chi - \rho g \omega \frac{dz}{dx}, \quad (2.6)$$

где  $V = G/(\rho \omega)$  – средняя по сечению скорость потока жидкости;  $\tau$  – касательное напряжение трения о стенки;  $\chi$  – смоченный периметр;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $z = z(x)$  – вертикальная отметка оси трубопровода.

Следуя гипотезе квазистационарности [69], величину  $\tau$  можно определить в соответствии с формулой Дарси-Вейсбаха:

$$\tau = \lambda \frac{\rho |V| \cdot V}{8}, \quad (2.7)$$

где  $\lambda$  - коэффициент гидравлического трения [3].

### 2.2.3 Уравнение энергии.

Из интегрального закона сохранения энергии, пренебрегая продольной теплопроводностью, можно получить уравнение энергии в следующем виде [29]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \omega \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ G \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial (p \omega V)}{\partial x} = -\rho g \omega V \frac{dz}{dx} - \tau \chi V + q_w \chi \quad (2.8)$$

где  $e$  – удельная внутренняя энергия;  $q_w$  – приток тепла к жидкости через стенки трубы, приходящийся на единицу площади поверхности трубы.

В первом приближении можно считать [87]:

$$q_w = K \cdot (T_{env} - T), \quad (2.9)$$

где  $T_{env}$  – абсолютная температуры наружной среды;  $T = T(x,t)$  – абсолютная температура жидкости;  $K$  – коэффициент теплопередачи [87].

Переходя к энтальпии  $h = e + p/\rho$  и используя (2. 5) – (2.6), уравнение (2.8) можно записать в виде:

$$\rho \omega \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial (p \omega)}{\partial t} + G \frac{\partial h}{\partial x} - \omega V \frac{\partial p}{\partial x} = q_w \chi. \quad (2.10)$$

## 2.3 Замыкающие соотношения.

Выберем в качестве основных термодинамических переменных давление  $p$  и температуру  $T$ . Тогда  $\rho = \rho(p, T)$  и  $h = h(p, T)$ .

Уравнения состояния для плотности будем задавать в следующей дифференциальной форме:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \sigma_p \rho, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\sigma_T \rho, \quad (2.11)$$

где  $\sigma_p = \sigma_p(p, T)$  – коэффициент изотермической сжимаемости жидкости;  
 $\sigma_T = \sigma_T(p, T)$  – коэффициент объемного расширения жидкости.

Для энтальпии справедливы следующие термодинамические соотношения [29], которые с учетом (2.11) можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho}(1 - \sigma_T T), \quad \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = c_p, \quad (2.12)$$

где  $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении. Первое равенство в (2.12) описывает эффект Джоуля-Томсона.

Зависимость площади поперечного сечения  $\omega$  от давления и температуры будем описывать также в дифференциальной форме:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_T = 2\alpha_p \omega, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial T}\right)_p = 2\alpha_T \omega, \quad (2.13)$$

где  $\alpha_T$  – коэффициент линейного расширения материала стенок трубы;  $\alpha_p$  – коэффициент упругого отпора стенок трубопровода [87, 10].

Для тонкостенных труб можно принять [10]:

$$\alpha_p = \frac{d}{2\Delta E_w},$$

где  $d$  – внутренний диаметр трубы;  $\Delta$  – толщина стенок трубы;  $E_w$  – модуль упругости материала стенок трубы.

#### 2.4 Модификация основных уравнений.

Выберем в качестве основных переменных давление, скорость и температуру:

$$p = p(x, t), \quad V = V(x, t), \quad T = T(x, t). \quad (2.14)$$

С учетом соотношений п.2.3 систему уравнений (2. 5), (2.6), (2.10) можно представить в виде следующей системы относительно переменных (2.14):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} - \kappa \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \rho a_0^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.15)$$

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \frac{dz}{dx} = - \frac{\tau \chi}{\omega}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} - \varepsilon T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{q_w \chi}{\rho \omega c_p}, \quad (2.17)$$

где

$$\kappa = \frac{\sigma_T - 2\alpha_T}{\sigma_p + 2\alpha_p}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_T}{\rho c_p}. \quad (2.18)$$

Здесь

$$a_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\left( \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial p} \right)_T}} = \frac{1}{\sqrt{\rho(\sigma_p + 2\alpha_p)}} \quad (2.19)$$

- скорость распространения волны гидравлического удара согласно Н.Е.Жуковскому [59].

Уравнения (2.15) – (2.17) получены с учетом предположения, что для действующих диапазонов изменения давления  $p$  и температуры  $T$  справедливы оценки:

$$\frac{p\alpha_T}{\rho c_p} \ll 1, \quad \alpha_p p \ll \sigma_T T. \quad (2.20)$$

Рассмотрим частный случай изотермического течения  $T = const$ . Этот случай получается как предельный переход из формулы (2.9) при  $K \rightarrow \infty$ , тогда  $T \rightarrow T_{env} = const$ . Кроме того, при  $K \rightarrow \infty$  уравнение энергии (2.17) вырождается в уравнение  $T = T_{env}$ , а уравнения (2.15) – (2.16) превращаются в общеизвестные уравнения гидравлического удара [59, 53, 182].

Путем несложных преобразований уравнения (2.15) – (2.17) можно привести к канонической форме:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = \kappa \frac{q_w \chi}{\rho \omega c_p (1 - \kappa \varepsilon T)}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\tau \chi}{\rho \omega} - g \frac{dz}{dx}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon T \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q_w \chi}{\rho \omega c_p (1 - \kappa \varepsilon T)}, \quad (2.23)$$

где

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{1 - \kappa \varepsilon T}} \quad (2.24)$$

– неизотермическая скорость распространения малых возмущений. Интересно, что  $a > a_0$ .

Для частного случая адиабатического потока имеем  $q_w = 0$ , и уравнения (2.21) – (2.22) опять превращаются в систему уравнений, по форме совпадающей с уравнениями гидравлического удара, где скорость волны гидравлического удара определяется по формуле (2.24), которая в данном случае представляет собой адиабатическую скорость распространения малых возмущений.

Уравнения (2.21) – (2.23) относятся к гиперболическому типу [137] и имеют следующие характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = V \pm a, \quad (2.25)$$

$$\frac{dx}{dt} = V, \quad (2.26)$$

при этом гидродинамические возмущения переносятся по характеристикам (2.25), а тепловое возмущение переносится по характеристике (2.26), т.е. со скоростью потока  $V$ .

## 2.5. Уравнения гидравлического удара

Гидравлический удар является быстропротекающим процессом, когда теплообмен с внешней средой не успевает развиваться; поэтому в этом случае можно полагать

$$q_w \approx 0, \quad (2.27)$$

и первых два уравнения в системе (2.21) – (2.23) можно рассматривать как автономную систему уравнений относительно переменных  $p$  и  $V$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\tau \chi}{\rho \omega} - g \frac{dz}{dx}, \quad (2.29)$$

которые и являются уравнениями гидравлического удара.

Уравнение (2.17) при выполнении условия (2.27) даёт соотношение, связывающее нагрев жидкости с изменением давления

$$dT \approx -\varepsilon T \cdot dp . \quad (2.30)$$

Для такой распространённой капельной жидкости, как вода, имеем  $\sigma_T \approx 1,5 \times 10^{-4} K^{-1}$ ,  $c_p \approx 4,19 \times 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ,  $\rho \approx 1000 \text{ кг/м}^3$ , откуда

$$\varepsilon \approx \frac{\sigma_T}{\rho c_p} \approx 3,58 \times 10^{-11} \text{ Па}^{-1}. \quad (2.31)$$

Рассматривая рабочие диапазоны для воды  $273 \leq T \leq 373$  ( $0^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C}$ ) и  $0 < p \leq 100 \text{ атм}$ , из вышеприведенных оценок имеем, согласно (2.30),  $\max |\Delta T| \approx 0,13^\circ\text{K}$ .

Отметим, что изотермическое течение формально также сводится к системе вида (2.28) – (2.29), но в этом случае под скоростью распространения возмущений понимается величина  $a_0$ , определяемая по формуле (2.19). Однако следует заметить, что для капельных жидкостей разница между  $a$  и  $a_0$  будет незначительна.

Например, для воды в интервале температур  $10^\circ - 20^\circ \text{C}$  и для диапазона давлений  $0,1 - 10 \text{ МПа}$  имеем  $\sigma_T \approx 1,5 \times 10^{-4} K^{-1}$ ,  $\sigma_p \approx 47 \times 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ , откуда, пренебрегая влиянием стенок трубы, учитывая (2.18), получаем  $\kappa\varepsilon T \approx 3,3 \times 10^{-3} \approx 0,3\%$ . Учитывая эту оценку и сравнивая формулы (2.19) и (2.24), получаем, что разница между  $a$  и  $a_0$  составляет не более  $0,2\%$ . Для воды в интервале температур  $60^\circ - 80^\circ \text{C}$  имеем соответственно,  $\sigma_T \approx 5,87 \times 10^{-4} K^{-1}$  и  $\sigma_p \approx 74 \times 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ , откуда получаем  $\kappa\varepsilon T \approx 39,1 \times 10^{-3} \approx 4\%$ . В этом случае расхождение между  $a$  и  $a_0$  составит уже около  $2\%$ .

Влияние стенок трубы только уменьшит эти оценки, т.к. согласно формуле (2.18) при этом величина  $\kappa$  уменьшается.

Можно утверждать, что с ростом температуры и давления расхождение между адиабатической  $a$  и изотермической скоростями звука  $a_0$  будет увеличиваться.

Таким образом, влияние гидродинамических параметров на нагрев жидкости в данном случае ничтожно; поэтому достаточно пользоваться только уравнениями гидравлического удара (2.28) – (2.29).

Однако другие капельные жидкости (например, некоторые сжиженные газы) могут иметь такие параметры  $\rho$ ,  $\sigma_T$ ,  $c_p$ , что влияние изменения давления на изменение температуры может быть существенным. В этом случае для нахождения необходимо привлекать ещё и уравнение энергии (2.23).

В случае течения газов, вообще говоря, необходимо использовать полностью систему уравнений (2.21) – (2.23) для нахождения трёх параметров  $p$ ,  $V$ ,  $T$ . Однако для описания течения газа в малом диапазоне давлений, например, в акустическом диапазоне, вполне годится и модель гидравлического удара (2.28) – (2.29).

### 2.5.1. Инварианты Римана

Подставляя (2.7) в уравнение движения (2.29) и рассматривая трубу круглого сечения, систему (2.28) – (2.29) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda \frac{V \cdot |V|}{2d} - g \frac{dz}{dx}, \quad (2.33)$$

где  $d$  - диаметр трубы.

При этом, согласно предыдущему пункту, основные параметры жидкости зависят только от давления:  $\rho = \rho(p)$ ,  $a = a(p)$ , т.е. жидкость является баротропной. Эта система уравнений относится к гиперболическому типу и допускает запись в инвариантах Римана [137]

$$r = \frac{1}{2} \left( V + \int_0^p \frac{dp}{\rho a} \right), \quad s = \frac{1}{2} \left( V - \int_0^p \frac{dp}{\rho a} \right), \quad (2.34)$$

откуда имеем

$$V = r + s, \quad \int_0^p \frac{dp}{\rho a} = r - s. \quad (2.35)$$

Для малосжимаемой каплевой жидкости можно считать

$$r \approx \frac{1}{2} \left( \frac{p}{\rho a} + V \right), \quad s \approx \frac{1}{2} \left( -\frac{p}{\rho a} + V \right), \quad (2.36)$$

откуда имеем

$$p = r - s, \quad V = \frac{r + s}{\rho a}. \quad (2.37)$$

Используя (2.34) и (2.35), систему (2.32) – (2.33) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (V + a) \frac{\partial r}{\partial x} = -\lambda \frac{(r + s) \cdot |r + s|}{4d} - \frac{g}{2} \frac{dz}{dx}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (V - a) \frac{\partial s}{\partial x} = -\lambda \frac{(r + s) \cdot |r + s|}{4d} - \frac{g}{2} \frac{dz}{dx}, \quad (2.39)$$

Учитывая, что рассматриваются существенно дозвуковые течения:

$$|V| \ll a, \quad (2.40)$$

в уравнениях (2.38) – (2.39) можно пренебречь конвективными слагаемыми  $V \partial r / \partial x$  и  $V \partial s / \partial x$ , т.е. с погрешностью менее 1% вместо (2.38) – (2.39) можно рассматривать уравнения

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} = -\lambda \frac{(r + s) \cdot |r + s|}{4d} - \frac{g}{2} \frac{dz}{dx}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} = -\lambda \frac{(r + s) \cdot |r + s|}{4d} - \frac{g}{2} \frac{dz}{dx}. \quad (2.42)$$

Соответственно, возвращаясь к «натуральным» переменным  $p$  и  $V$ , с той же погрешностью можно пренебречь конвективными членами  $V \partial p / \partial x$  и  $V \partial V / \partial x$  в исходных уравнениях (2.32) – (2.33), т.е. рассматривать вместо них систему

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda \frac{V \cdot |V|}{2d} - g \frac{dz}{dx}. \quad (2.44)$$

## 2.5.2 Гидростатический напор

При расчетах гидравлического удара, чтобы исключить гидростатическую составляющую, иногда [10, 71] вместо давления используют переменную

$$H(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho g} + z(x). \quad (2.45)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} (1 - \sigma_p p), \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - \sigma_p p) + \frac{dz}{dx}. \quad (2.46)$$

Считая, что для капельной жидкости справедливо

$$\sigma_p p \ll 1, \quad (2.47)$$

из (2.46) имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} \approx \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} \approx \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dz}{dx}. \quad (2.48)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения гидравлического удара (2.43) – (2.44), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda \frac{V \cdot |V|}{2d}, \quad (2.50)$$

Для переменным «напор»-«скорость» инварианты  $r$  и  $s$  можно определить как

$$r \approx \frac{1}{2} \left( \frac{gH}{a} + V \right), \quad s \approx \frac{1}{2} \left( -\frac{gH}{a} + V \right), \quad (2.51)$$

откуда имеем

$$H = \frac{a(r - s)}{g}, \quad V = r + s. \quad (2.52)$$

Тогда систему уравнений (2.49) – (2.50) можно записать в виде

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} = -\lambda \frac{V \cdot |V|}{4d} = -\lambda \frac{(r + s) \cdot |r + s|}{4d} = -B \cdot (r + s), \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} = -\lambda \frac{V \cdot |V|}{4d} = -\lambda \frac{(r + s) \cdot |r + s|}{4d} = -B \cdot (r + s), \quad (2.54)$$

где

$$B = B(V) = \lambda \frac{|r + s|}{4d} \quad (2.55)$$

– возрастающая функция скорости.

## 2.6. Гидравлический удар в коаксиальных трубах

На практике возникают задачи, когда возмущение распространяется по системе коаксиальных труб. Такого рода задачи могут возникать в машиностроении, нефтяной индустрии и т.д.

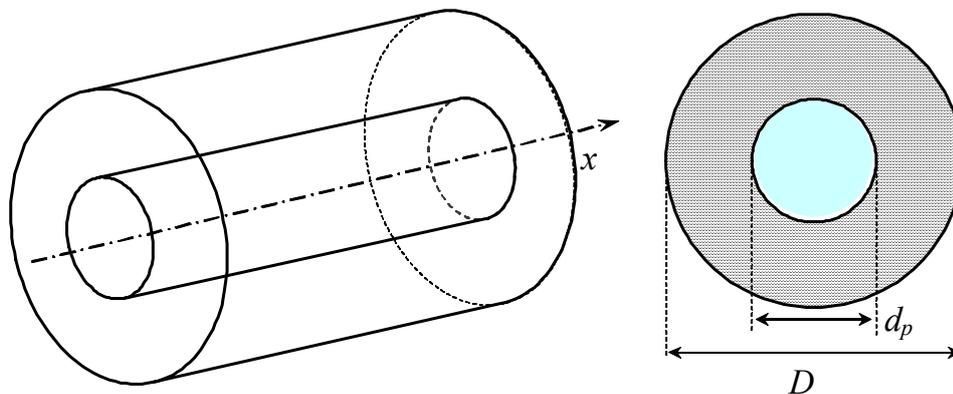


рис. 2.2

Здесь  $d_p$  - диаметр внутренней трубы;  $D$  - диаметр внешней трубы;

Жидкость заполняет как внутреннюю трубу, так и межтрубный зазор. В общем случае это могут быть разные жидкости с разными характеристиками.

Применяя законы сохранения (2.5) и (2.6) отдельно к внутренней трубе и затрубному (кольцевому пространству), получаем систему уравнений

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial(VG)}{\partial x} + \omega \frac{\partial p}{\partial x} = -\tau\chi - \rho g \omega \frac{dz}{dx}, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial(\rho_k\omega_k)}{\partial t} + \frac{\partial G_k}{\partial x} = 0, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial G_k}{\partial t} + \frac{\partial(V_k G_k)}{\partial x} + \omega_k \frac{\partial p_k}{\partial x} = -\tau_k \chi_k - \rho_k g \omega_k \frac{dz}{dx}, \quad (2.59)$$

где индекс "к" отмечает величины, относящиеся к кольцевому пространству; первые два уравнения относятся ко внутренней трубе.

Здесь под  $\tau_k \chi_k$  подразумевается

$$\tau_k \chi_k = \tau \cdot \chi + \tau_w \cdot \chi_w, \quad (2.60)$$

где  $\tau_w$  - напряжение на стенках внешней трубы,  $\chi_w$  - периметр сечения внешней трубы;  $\tau_0$  - напряжение на внешних стенках внутренней трубы,  $\chi_0$  - периметр

наружного сечения внутренней трубы, т.е.  $\tau_k$  представляет собой среднее напряжение трения

$$\tau_k = \frac{\tau \cdot \chi + \tau_w \cdot \chi_w}{\chi_k}, \quad (2.61)$$

Для нахождения напряжений в случае неньютоновских жидкостей можно воспользоваться результатами работы [41], а также полуэмпирическими формулами [105, 184, 97, 135].

Для замыкания системы уравнений (2.56) – (2.59) применим к ним допущения теории гидравлического удара (см. раздел 2.3). Рассматривая

$$\rho = \rho(p), \quad \rho_k = \rho(p_k), \quad \omega = \omega(p, p_k), \quad \omega_k = \omega(p, p_k) = \omega_w(p_k) - \bar{\omega}(p_k, p), \quad (2.62)$$

где  $\omega_w = \pi D^2/4$  – общая площадь сечения внешней трубы;  $\bar{\omega} = \pi (d + 2\delta)^2/4$  – внешняя площадь сечения внутренней трубы.

Применяя к (2.62) законы, аналогичные (2.11) и (2.13), получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \sigma_p \rho, \quad \frac{\partial \rho_k}{\partial p_k} = \sigma_{k,p} \rho_k, \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} d\omega &= 2\omega \cdot (\alpha_p dp - \alpha_{k,p} dp_k), \quad d\omega_k = 2[\alpha_w \omega_w dp_k - (\bar{\alpha}_k dp_k + \bar{\alpha}_p dp) \bar{\omega}] \\ d\omega_k &= \frac{\partial \omega_w}{\partial p_k} dp_k - \left( -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} dp \right) = \left( \frac{\partial \omega_w}{\partial p_k} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p_k} \right) dp_k - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} dp = \\ &= (2\alpha_w \omega_w - 2\bar{\alpha}_k \bar{\omega}) dp_k - 2\bar{\alpha}_p \bar{\omega} dp = 2[\alpha_w \omega_w dp_k - (\bar{\alpha}_k dp_k + \bar{\alpha}_p dp) \bar{\omega}] \end{aligned} \quad (2.64)$$

Здесь  $\alpha_w$  – коэффициент упругого отпора стенок наружного трубопровода;  $\alpha_{k,p}$  – коэффициент упругого отпора стенок внутреннего трубопровода на внешнее (сжимающее) воздействие;  $\bar{\alpha}_p$  – коэффициент упругого отпора со стороны наружных стенок внутреннего трубопровода на внутреннее воздействие.

Подставляя в уравнения (2.56) – (2.59) замыкающие соотношения (2.63) – (2.64), получаем систему уравнений, описывающих распространение возмущений в коаксиальном трубопроводе:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} - e \cdot \left( \frac{\partial p_{\kappa}}{\partial t} + V \frac{\partial p_{\kappa}}{\partial x} \right) + \rho a_0^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\tau \chi}{\rho \omega} - g \frac{dz}{dx}, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial p_{\kappa}}{\partial t} + V_{\kappa} \frac{\partial p_{\kappa}}{\partial x} - e_{\kappa} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + V \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho_{\kappa} \bar{a}_{\kappa}^2 \frac{\partial V_{\kappa}}{\partial x} = 0, \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial V_{\kappa}}{\partial t} + V_{\kappa} \frac{\partial V_{\kappa}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{\kappa}} \frac{\partial p_{\kappa}}{\partial x} = - \frac{\tau_{\kappa} \chi_{\kappa}}{\rho_{\kappa} \omega_{\kappa}} - g \frac{dz}{dx}, \quad (2.68)$$

где  $a_0$  – скорость волны гидравлического удара во внутренней трубе, согласно Н.Е.Жуковскому

$$a_0 = 1 / \sqrt{\rho \cdot (\sigma_p + 2\alpha_p)}, \quad (2.69)$$

а величина

$$e = 2\alpha_{\kappa,p} \rho a_0^2 = \frac{2\alpha_{\kappa,p}}{\sigma_p + 2\alpha_p}, \quad (2.70)$$

- безразмерный коэффициент взаимовлияния, характеризующий воздействие затрубного пространства на течение во внутренней трубе.

Аналогично,  $\bar{a}_{\kappa}$  – скорость волны гидравлического удара в межтрубном зазоре

$$\bar{a}_{\kappa} = a_{\kappa,0} / \sqrt{1 + 2\rho_{\kappa} a_{\kappa,0}^2 \frac{\bar{\omega}}{\omega_{\kappa}} (\alpha_w - \bar{\alpha}_{\kappa})}, \quad (2.71)$$

где

$$a_{\kappa,0} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{\kappa} (\sigma_{\kappa,p} + 2\alpha_w)}}, \quad (2.72)$$

а  $e_{\kappa}$  – коэффициент взаимовлияния, учитывающий воздействие через стенки внутренней трубы параметров течения во внутренней трубе на параметры течения в межтрубном зазоре

$$e_{\kappa} = \frac{2\rho_{\kappa} a_{\kappa,0}^2}{1 + 2\rho_{\kappa} a_{\kappa,0}^2 \frac{\bar{\omega}}{\omega_{\kappa}} (\alpha_w - \bar{\alpha}_{\kappa})} \frac{\bar{\omega}}{\omega_{\kappa}} \bar{\alpha}_p. \quad (2.73)$$

Систему уравнений (2.65) – (2.68) можно разрешить относительно производных по времени и записать в матричной форме

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \bar{f}, \quad (2.74)$$

где  $\vec{u}$  – вектор неизвестных

$$\vec{u} = \{p, V, p_\kappa, V_\kappa\}, \quad (2.75)$$

матрица  $A$  равна

$$A = \begin{pmatrix} \frac{V - e \cdot e_\kappa V_\kappa}{1 - e \cdot e_\kappa} & \frac{\rho a_0^2}{1 - e \cdot e_\kappa} & e \frac{V_\kappa - V}{1 - e \cdot e_\kappa} & e \frac{\rho_\kappa \bar{a}_\kappa^2}{1 - e \cdot e_\kappa} \\ \frac{1}{\rho} & V & 0 & 0 \\ e_\kappa \frac{V - V_\kappa}{1 - e \cdot e_\kappa} & e_\kappa \frac{\rho a_0^2}{1 - e \cdot e_\kappa} & \frac{V_\kappa - e \cdot e_\kappa V}{1 - e \cdot e_\kappa} & \frac{\rho_\kappa \bar{a}_\kappa^2}{1 - e \cdot e_\kappa} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_\kappa} & V_\kappa \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

и вектор правых частей

$$\vec{f} = \left\{ 0, g \frac{dz}{dx} - \frac{\tau \chi}{\rho \omega}, 0, g \frac{dz}{dx} - \frac{\tau_\kappa \chi_\kappa}{\rho_\kappa \omega_\kappa} \right\}. \quad (2.77)$$

Характеристическое уравнение для системы будет

$$\lambda^4 - 2(V + V_\kappa)\lambda^3 - 2c\lambda^2 - 2b\lambda + \det A = 0, \quad (2.78)$$

где

$$c = \frac{a_0^2 + \bar{a}_\kappa^2}{2(1 - e \cdot e_\kappa)} - VV_\kappa - \frac{(V + V_\kappa)^2}{2}, \quad b = -\frac{a_0^2 V_\kappa + \bar{a}_\kappa^2 V}{1 - e \cdot e_\kappa} + 2VV_\kappa(V + V_\kappa) \quad (2.79)$$

и  $\det A$  – определитель матрицы (2.76):

$$\det A = \frac{a_0^2 \bar{a}_\kappa^2 - a_0^2 V_\kappa^2 - \bar{a}_\kappa^2 V^2}{1 - e \cdot e_\kappa} + V^2 V_\kappa^2, \quad (2.80)$$

Можно показать, что при выполнении достаточно естественных условий

$$c > 0, \quad \det A > 0, \quad 0 \leq e \cdot e_\kappa < 1. \quad (2.81)$$

характеристическое уравнение (2.78) имеет все действительные корни, причем два из них положительны, а два – отрицательны. То есть система уравнений (2.65) – (2.68) является гиперболической, и описывает распространение двух волн с различающимися скоростями в положительном направлении, и двух волн с различающимися скоростями в отрицательном направлении.

Учитывая, что для реальных течений жидкости в трубопроводах скорости течения обычно невелики, вклад конвективных слагаемых в систему уравнений (2.65) – (2.68) мал, поэтому ими можно пренебречь. Переходя к напорам

$h = p/\rho g + z$  и  $h = p_\kappa/\rho_\kappa g + z$ , систему уравнений, описывающую распространение волн в коаксиальном трубопроводе, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a_0^2}{g(1-e \cdot e_\kappa)} \frac{\partial V}{\partial x} + e \frac{\rho_\kappa}{\rho} \frac{\bar{a}_\kappa^2}{g(1-e \cdot e_\kappa)} \frac{\partial V_\kappa}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{\tau \chi}{\rho \omega}, \\ \frac{\partial h_\kappa}{\partial t} + \frac{\bar{a}_\kappa^2}{g(1-e \cdot e_\kappa)} \frac{\partial V_\kappa}{\partial x} + e_\kappa \frac{\rho}{\rho_\kappa} \frac{a_0^2}{g(1-e \cdot e_\kappa)} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial V_\kappa}{\partial t} + g \frac{\partial h_\kappa}{\partial x} &= -\frac{\tau_\kappa \chi_\kappa}{\rho_\kappa \omega_\kappa}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Характеристическое уравнение для этой системы будет следующим

$$\lambda^4 - \frac{a_0^2 + \bar{a}_\kappa^2}{1-e \cdot e_\kappa} \lambda^2 + \frac{a_0^2 \bar{a}_\kappa^2}{1-e \cdot e_\kappa} = 0, \quad (2.83)$$

Биквадратное уравнение (2.83) имеет четыре вещественных корня

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{a_0^2 + \bar{a}_\kappa^2 + \sqrt{(a_0^2 - \bar{a}_\kappa^2)^2 + 4e \cdot e_\kappa a_0^2 \bar{a}_\kappa^2}}}{\sqrt{2(1-e \cdot e_\kappa)}}, \quad \lambda_2 = -\lambda_1, \\ \lambda_3 &= \frac{\sqrt{a_0^2 + \bar{a}_\kappa^2 - \sqrt{(a_0^2 - \bar{a}_\kappa^2)^2 + 4e \cdot e_\kappa a_0^2 \bar{a}_\kappa^2}}}{\sqrt{2(1-e \cdot e_\kappa)}}, \quad \lambda_4 = -\lambda_3. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Отсюда видно, что при наличии взаимодействия через стенку трубы ( $e \neq 0$  и  $e_\kappa \neq 0$ ), скорости распространения малых возмущений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  отличаются от скоростей распространений возмущений  $a_0$  и  $\bar{a}_\kappa$  в каждой среде по отдельности. При этом, если пренебречь взаимодействием через стенку, положив  $e e_\kappa \approx 0$ , из (2.84) получаем

$$\lambda_1 = a_0, \quad \lambda_2 = -a_0, \quad \lambda_3 = \bar{a}_\kappa, \quad \lambda_4 = -\bar{a}_\kappa. \quad (2.85)$$

Отметим, что уравнение (2.83) из уравнения (2.78) можно получить также предельным переходом при  $V/a_0 \rightarrow 0$  и  $V_\kappa/\bar{a}_\kappa \rightarrow 0$ .

### 2.6.1. Инварианты Римана

Так как коэффициенты уравнения (2.82) постоянны, и, значит, постоянны собственные значения (2.84), данную систему можно записать в инвариантах Римана [137]

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial y_i}{\partial x} = F_i, \quad \text{где } i = 1, \dots, 4. \quad (2.86)$$

где инварианты Римана можно определить как

$$\begin{aligned} y_1 = r = h + \frac{a_0}{g} V - \eta_\kappa \left( h_\kappa + \frac{a_0}{g} V_\kappa \right), \quad y_2 = s = -h + \frac{a_0}{g} V - \eta_\kappa \left( -h_\kappa + \frac{a_0}{g} V_\kappa \right), \\ y_3 = r_\kappa = -\eta \left( h + \frac{\bar{a}_\kappa}{g} V \right) + h_\kappa + \frac{\bar{a}_\kappa}{g} V_\kappa, \quad y_4 = s_\kappa = -\eta \left( -h + \frac{\bar{a}_\kappa}{g} V \right) - h_\kappa + \frac{\hat{a}_\kappa}{g} V_\kappa, \end{aligned} \quad (2.87)$$

Здесь

$$\eta = e_\kappa \frac{\rho}{\rho_\kappa} \frac{a_0^2}{a_0^2 - \bar{a}_\kappa^2 (1 - e \cdot e_\kappa)}, \quad \eta_\kappa = e \frac{\rho_\kappa}{\rho} \frac{\bar{a}_\kappa^2}{\bar{a}_\kappa^2 - a_0^2 (1 - e \cdot e_\kappa)}. \quad (2.88)$$

При отсутствии взаимовлияния через стенку коэффициенты  $\eta=0$  и  $\eta_\kappa=0$ .

Вектор правых частей будет выглядеть так

$$\begin{aligned} F_1 = -\frac{a_0}{g} \frac{\tau\chi}{\rho\omega} + \eta_\kappa \frac{a_0}{g} \frac{\tau_\kappa\chi_\kappa}{\rho_\kappa\omega_\kappa} = \frac{a_0}{g} \left( \frac{\tau\chi}{\rho\omega} - \eta_\kappa \frac{\tau_\kappa\chi_\kappa}{\rho_\kappa\omega_\kappa} \right), \quad F_2 = F_1, \\ F_3 = \eta \frac{\bar{a}_\kappa}{g} \frac{\tau\chi}{\rho\omega} - \frac{\bar{a}_\kappa}{g} \frac{\tau_\kappa\chi_\kappa}{\rho_\kappa\omega_\kappa} = -\frac{\bar{a}_\kappa}{g} \left( \frac{\tau_\kappa\chi_\kappa}{\rho_\kappa\omega_\kappa} - \eta \frac{\tau\chi}{\rho\omega} \right), \quad F_4 = F_3. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Каждое уравнение (2.86) представляет собой производную по характеристическому направлению

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad \text{где } i = 1, \dots, 4. \quad (2.90)$$

Т.к. собственные вектора линейно независимы, система уравнений (2.87) однозначно разрешима относительно переменных  $h, V, h_\kappa, V_\kappa$

$$\begin{aligned} h = \frac{y_1 - y_2 + \eta_\kappa (y_3 - y_4)}{2(1 - \eta_\kappa \eta)} = \frac{r - s + \eta_\kappa (r_\kappa - s_\kappa)}{2(1 - \eta_\kappa \eta)}, \\ V = g \frac{a_\kappa (y_1 + y_2) + \eta_\kappa a (y_3 + y_4)}{2(1 - \eta_\kappa \eta) a a_\kappa} = g \frac{a_\kappa (r + s) + \eta_\kappa a (r_\kappa + s_\kappa)}{2(1 - \eta_\kappa \eta) a a_\kappa}, \\ h_\kappa = \frac{\eta (y_1 - y_2) + y_3 - y_4}{2(1 - \eta_\kappa \eta)} = \frac{\eta (r - s) + r_\kappa - s_\kappa}{2(1 - \eta_\kappa \eta)}, \\ V_\kappa = g \frac{\eta a_\kappa (y_1 + y_2) + a (y_3 + y_4)}{2(1 - \eta_\kappa \eta) a a_\kappa} = g \frac{\eta a_\kappa (r + s) + a (r_\kappa + s_\kappa)}{2(1 - \eta_\kappa \eta) a a_\kappa}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

## ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАБОТЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

### 3.1. Общие замечания

Нестационарные течения в трубопроводах системы описываются системами дифференциальных уравнений, приведенными в разделе 2. Для отыскания их решения необходимо задать еще начальные значения параметров и граничные условия. Таким образом, задача сводится к решению смешанной задачи<sup>1</sup> [43, 137] для системы гиперболических уравнений, определенной на графе. В качестве граничных условий будут выступать уравнения, т.е. математические модели, описывающие функционирование различных узлов системы. Разнообразие конкретных видов узлов чрезвычайно велико. В настоящей главе приводятся математические модели наиболее распространенных типов узлов.

Так как узлы являются «точечными» объектами, они будут описываться моделями с сосредоточенными параметрами [106, 144]. В качестве параметров таких моделей будут участвовать значения давлений, скоростей, температур и т.п. в конечных участках трубопроводов, примыкающих к данному узлу. Кроме того, некоторые типы узлов будут обладать собственными параметрами  $\bar{\lambda}^j$ , где  $j$  – номер узла. Например, к собственным параметрам узла можно отнести число оборотов насоса, ход штока клапана и т.п.

Граничные условия, описывающие функционирование узлов, можно разделить на две группы.

Первая группа уравнений описывает взаимодействие параметров на конце трубопровода, примыкающего к узлу, с собственными параметрами узла. Такие граничные условия, вслед за [11, 12], будут называться условиями подхода.

Вторую группу уравнений, охватывающие поведение узла в целом, вслед за [11, 12], будем называть условиями в узле. Сюда относятся, например, уравнения баланса масс в узле, а также уравнения, описывающие поведение

---

<sup>1</sup> Для нахождения решения стационарной задачи достаточно решить краевую задачу.

собственных параметров узла.

Из естественного требования корректности краевых условий [137] вытекает, что такая система уравнений, описывающих функционирование узла, должна быть однозначно разрешима.

### 3.2. Соединение труб.

Соединение труб схематически изображено на рис. 3.1

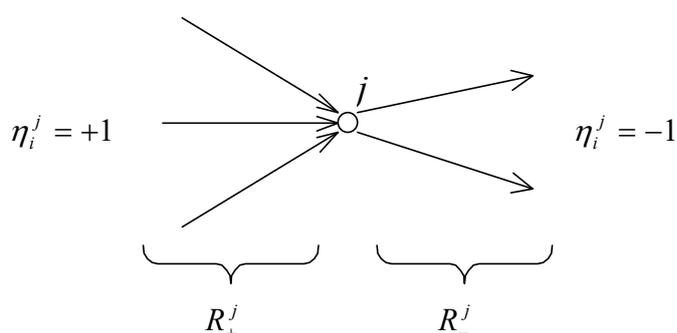


рис. 3.1

Будем предполагать, что в узле происходит полное перемешивание жидкости, т.е. там устанавливается единое давление  $p^j$  и единая температура  $T^j$ .

В качестве собственных параметров узла будет выступать напор [4] в узле  $h^j$  и утечка (массовая) жидкости из узла  $m^j$ , т.е.

$$\bar{\Lambda}^j = \{h^j, m^j\}. \quad (3.1)$$

Условиями подхода будут

$$\frac{p_i^j}{\rho_i^j g} + z_i^j - h^j = \zeta_i^j \frac{\eta_i^j V_i^j |V_i^j|}{2g}, \quad (3.2)$$

где  $\zeta_i^j$  — сопротивление соединения  $i$ -той трубы и  $j$ -того узла, которое, вообще говоря, зависит от направления потока:

$$\zeta_i^j = \begin{cases} \zeta_{i,d}^j & \text{если } \eta_i^j V_i^j \geq 0; \\ \zeta_{i,r}^j & \text{если } \eta_i^j V_i^j < 0; \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $\zeta_{i,d}^j$  - сопротивление входа из  $i$ -той трубы в  $j$ -ый узел,  $\zeta_{i,r}^j$  - сопротивление выхода из  $j$ -ого узла в  $i$ -тую трубу.

Это уравнение учитывает сопротивления на проход, на поворот и т.п. в тройниках, крестовинах и т.д.

Обычно при проведении расчетов нестационарных процессов эти сопротивления не учитываются или учитываются приближенно, путем добавления эквивалентных сопротивлений к соответствующим трубам. В этом случае условие (3.2) превращается в

$$\frac{p_i^j}{\rho_i^j g} + z_i^j = h^j, \quad (3.4)$$

Уравнение баланса масс в узле

$$\sum_{i \in R^j} \eta_i^j M_i^j = m^j, \quad (3.5)$$

где  $M = \rho \omega V$  – массовый расход.

Уравнения (3.5) отражают баланс масс при предположении, что отсутствуют утечки из точки стыковки трубы с узлом (все утечки включены в величину  $m^j$ ).

### 3.2.1. Определение утечек

В общем виде величина утечек определяется зависимостью общего вида

$$q^j(m^j, h^j, t) = 0. \quad (3.6)$$

Ниже рассмотрены несколько наиболее характерных частных случаев этой зависимости.

а) Величина утечек может задаваться в виде известной функции времени

$$m^j = m^j(t). \quad (3.7)$$

Частным случаем этого уравнения является постоянное значение утечек (отбора из узла)

$$m^j = const, \quad (3.8)$$

или узел без утечек

$$m^j = 0. \quad (3.9)$$

б) Величина утечек определяется в соответствии с известным законом сопротивления [23, 3, 64] в виде

$$m^j = \text{sign}(\Delta p) \omega_s \sqrt{\frac{2\rho|\Delta p|}{\zeta}}, \quad (3.10)$$

где  $\omega_s$  - площадь проходного сечения,  $\zeta$  - коэффициент сопротивления при истечении [23, 3, 64].

Здесь  $\Delta p$  - перепад давлений между узлом и наружной средой

$$\Delta p^j = p^j - p_{env}. \quad (3.11)$$

где  $p_{env}$  - давление внешней среды (например, атмосферное, если истечение происходит в атмосферу).

Коэффициент сопротивления  $\zeta$ , в свою очередь, может быть постоянной величиной

$$\zeta^j = \text{const}, \quad (3.12)$$

или заданной функцией времени

$$\zeta^j = \zeta^j(t), \quad (3.13)$$

если имеет место истечение через регулируемое сопротивление. В этом случае зависимость (3.13) задает закон изменения сопротивления (например, закон закрытия или открытия задвижки). Как правило, зависимость вида (3.13) можно представить в виде известной функции относительного хода задвижки или клапана  $\varepsilon$  в виде

$$\zeta^j = \zeta^j(\varepsilon), \quad (3.14)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ .

Обычно зависимость вида (3.14) представляют как

$$\zeta^j = \zeta_0^j / \varepsilon^n, \quad (3.15)$$

где  $\zeta_0^j$  - сопротивление клапана при полном открытии,  $n$  - эмпирический показатель степени ( $n \approx 2$ ).

Зависимость вида  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  известна, если задан закон закрытия (или открытия) клапана, задвижки и т.п.

В общем случае величина  $\varepsilon$  является функцией параметров истечения

$$f(\varepsilon, m, h, t) = 0. \quad (3.16)$$

Строго говоря, уравнение должно учитывать динамику перемещения движущихся частей запорно-регулирующего устройства.

Однако во многих случаях достаточно учитывать зависимость (3.16) в упрощенной форме.

Рассмотрим пример, когда в соединении труб установлен предохранительный клапан, настроенный на давление  $p_{reg}$  с точностью регулирования  $\Delta p_{reg}$ . Будем считать, что когда выполняется условие

$$p^j \leq p_{reg}, \quad (3.17)$$

клапан закрыт, т.е.  $\varepsilon = 0$ ; а если выполняется условие,

$$p^j \geq p_{reg} + \Delta p_{reg}, \quad (3.18)$$

клапан полностью открыт, т.е.  $\varepsilon = 1$ . В промежуточных состояниях, т.е. когда

$$p_{reg} < p^j < p_{reg} + \Delta p_{reg}, \quad (3.19)$$

будем предполагать линейную зависимость  $\varepsilon$  от давления

$$\varepsilon = (p^j - p_{reg}) / \Delta p_{reg}. \quad (3.20)$$

### 3.3. Компенсатор (аккумулятор)

Схема компенсатора представлена на рис. 3.2. Компенсатор (аккумулятор) представляет собой соединение труб, к которому присоединен закрытый резервуар, заполненный газом. Жидкость от газа отделена поршнем. Высота жидкости в резервуаре обозначена через  $h_k$ .

Не умаляя общности, можно считать, что сосуд компенсатора представляет собой толстостенный цилиндр с внутренним сечением  $S$ .

В качестве собственного параметра узла будет выступать напор в узле  $h^j$ , высота столба жидкости  $h_k$ , массовый расход  $m^j$ , поступающий в компенсатор, скорость перемещения поршня  $V_k$ , объем газовой полости компенсатора  $W_g$  и давление газа в этой полости  $p_g$ , т.е.

$$\vec{\Lambda}^j = \{h^j, h_k, m^j, V_k, W_g, p_g\}. \quad (3.21)$$

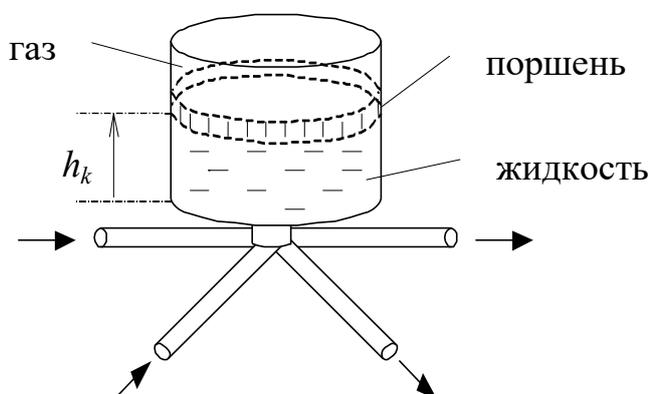


рис. 3.2

Аналогично предыдущему случаю, будут выполняться уравнения баланса масс (3.5) и условия подхода (3.2).

Потери давления на входе в компенсатор

$$p^j - p_{bv} = \zeta_{pr}^j \frac{m^j |m^j|}{2\rho\omega_{pr}^2}, \quad (3.22)$$

где  $p_{bv}$  - давление на дне сосуда,  $\zeta_{pr}^j$  - сопротивление проходного отверстия,  $\omega_{pr}$  - площадь проходного сечения.

Изменение массы жидкости внутри сосуда определяется соотношением

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h_k} \rho \Omega dh = m^j, \quad (3.23)$$

где  $\Omega$  – площадь поперечного сечения сосуда компенсатора.

Пренебрегая волновыми процессами в камере компенсатора и считая жидкость малосжимаемой, можно считать, что давление по вертикали распределено по гидростатическому закону

$$p(y) = p_k + \rho g y, \quad (3.24)$$

где  $y$  - расстояние, отсчитываемое вниз от поршня,  $p_k$  - давление на нижней поверхности поршня. Отсюда получается

$$p_{bv} - p_k = \rho g h_k. \quad (3.25)$$

Очевидно, что

$$\frac{dh_k}{dt} = V_k. \quad (3.26)$$

Дифференцируя (3.23), получаем

$$\frac{\Omega h_k}{a_0^2} \frac{dp_k}{dt} + \rho \Omega V_k = m^j, \quad (3.27)$$

где  $a_0$  определяется как скорость звука в толстостенной трубе.

Изменение объема газа связано с движением поршня

$$\frac{dW_g}{dt} = -\Omega V_k. \quad (3.28)$$

Поведение объема газа в компенсаторе будем описывать уравнением политропы

$$p_g \cdot W_g^n = const, \quad (3.29)$$

где  $n$  - показатель политропы.

Дифференцируя (3.29) по времени, получаем

$$\frac{W_g}{np_g} \frac{dp_g}{dt} = \Omega V_k, \quad (3.30)$$

Перемещение поршня описывается уравнением движения

$$M_p \frac{dV_k}{dt} = \Omega p_k - \Omega_g p_g - F_{fr}, \quad (3.31)$$

где  $M_p$  - масса поршня,  $\Omega_g$  - площадь поршня со стороны газа,  $F_{fr}$  - сила трения сальниковых уплотнений.

#### 3.4. Уравнительный резервуар

Схема уравнительного резервуара представлена на рис. 3.3. Из схемы видно, что в отношении математического описания принципиальные различия между компенсатором и уравнительным резервуаром незначительны: уравнительный резервуар не имеет поршня, а вместо газовой полости имеется доступ к открытой атмосфере.

Таким образом, в случае уравнительного резервуара условия (3.28) – (3.30) отсутствуют, а вместо условия (3.31) будет

$$p_k = p_{atm}, \quad (3.32)$$

где  $p_{atm}$  - атмосферное давление.

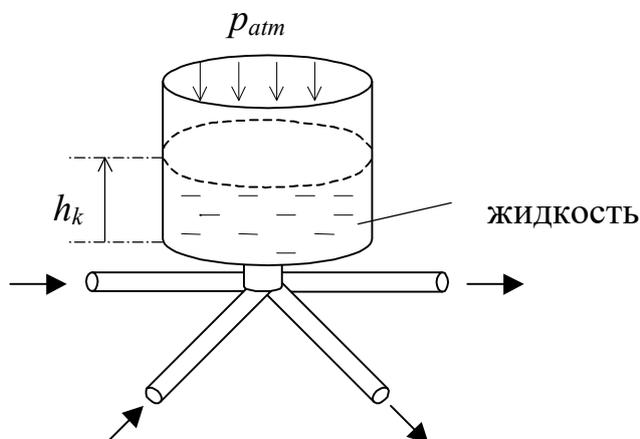


рис. 3.3

В этом случае соотношение (3.27) превращается в

$$m^j = \rho \Omega \frac{dh_k}{dt}. \quad (3.33)$$

Итак, в данном случае вектор собственных параметров узла включает в себя следующие компоненты

$$\vec{\Lambda}^j = \{h^j, h_k, m^j\}. \quad (3.34)$$

### 3.5. Тупиковый отвод

Тупиковый отвод описывает ситуацию, когда узел  $j$  соединен всего с одной трубой  $i$  (см. рис. 3.4).

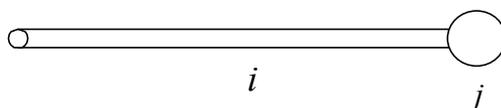


рис. 3.4

Такой узел можно рассматривать как частный случай соединения труб (см. раздел 3.2).

### 3.6. Местные сопротивления

Схематическое изображение местного сопротивления, расположенного в узле  $j$ , представлено на рис. 3.5. Здесь  $i$  - индекс подходящей трубы, и  $k$  - индекс отводящей трубы.

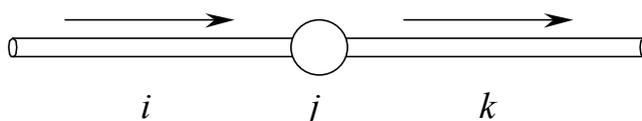


рис. 3.5

Баланс масс в этом случае будет (утечки отсутствуют)

$$\rho Q_i^j = \rho Q_k^j = m^j. \quad (3.35)$$

В качестве собственного параметра узла в данном случае может выступать расход  $m^j$ , проходящий через узел  $j$ .

В общем случае, потери давления в местном сопротивлении будут задаваться в виде

$$h_i^j - h_k^j = \mu \cdot A^j \cdot m^j + \frac{B^j \cdot |m^j| \cdot m^j}{\rho}, \quad (3.36)$$

где  $A$ ,  $B$  - коэффициенты, характеризующее местное сопротивление,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости [3, 147].

Формула (3.36) носит достаточно универсальный характер и охватывает значительный класс сопротивлений: сопротивления с ламинарным характером течения ( $A \neq 0, B = 0$ ), например, фильтры; сопротивления с острыми кромками с квадратичным законом потерь ( $A = 0, B \neq 0$ ), например, задвижка, клапаны и прочая арматура; сопротивления в переходной области [23] ( $A \neq 0, B \neq 0$ ).

Например, имеется задвижка с диаметром условного прохода  $d_y$  и сопротивлением  $\zeta$ . Тогда

$$A = 0, B = \frac{8\zeta}{\rho g \pi^2 d_y^4}. \quad (3.37)$$

### 3.6.1. Фильтр

Для фильтра расход  $m^j$  определяется по формуле Пуазейля [4, 71]:

$$m^j = K^j \frac{\Delta p^j F^j}{\mu}, \quad (3.38)$$

где  $K^j$  - удельная пропускная способность поверхности фильтровального материала [76];  $F^j$  - площадь поверхности фильтрующего материала; - перепад давлений на местном сопротивлении,

$$\Delta p^j = \rho g (h_i^j - h_k^j). \quad (3.39)$$

Тогда

$$A^j = \frac{1}{\rho g K^j \cdot F^j}, \quad B^j = 0. \quad (3.40)$$

### 3.6.2. Регулируемое местное сопротивление

К этому типу относятся такие устройства, где известен характер изменения во времени сопротивления (например, известен закон открытия или закрытия задвижки).

Функционирование такого устройства описывается соотношением

$$m^j = \text{sign}(\Delta p^j) \cdot \sigma^j \cdot \sqrt{\rho |\Delta p^j|} \quad (3.41)$$

где  $\sigma$  - проводимость:

$$\sigma^j = \frac{1}{\sqrt{B^j}}.$$

Величина  $\sigma = \sigma(t)$  – известная функция времени.

### 3.6.3. Обратный клапан

Функционирование обратного клапана также описывается формулой (3.36), причем

$$\sigma^j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{B_0^j}}, & \text{если } \Delta p^j \geq 0; \\ 0, & \text{если } \Delta p^j < 0; \end{cases} \quad (3.42)$$

где  $B_0^j$  - сопротивление клапана в полностью открытом состоянии.

Время закрытия клапана  $t_3$  зависит от инерционных характеристик подвижных частей клапана и сил трения.

### 3.6.4. Предохранительный клапан

Узел изображен на рис. 3.5, где трубе  $i$  соответствует напорная магистраль, а трубе  $k$  - сливная.

При выполнении условия

$$P_i < P_y \quad (3.43)$$

клапан закрыт, то есть справедливо

$$m^j = M_i^j = M_k^j = 0. \quad (3.44)$$

Здесь  $P_y$  - давление срабатывания, на которое настроен клапан.

Упрощенно можно считать, что при открытии клапана выполняется условие

$$P_i = P_y. \quad (3.45)$$

до тех пор, пока

$$m^j > 0. \quad (3.46)$$

В действительности, по причине инерционности клапанов, сил трения и погрешностей регулирования вместо условия (2.28) выполняется условие

$$P_y - \Delta P_{РЕГ} \leq P_i \leq P_y + \Delta P_{РЕГ}, \quad (3.47)$$

где  $\Delta P_{РЕГ}$  - точность регулирования.

По этой причине, при падении давления  $P_i$  вновь ниже  $P_y$  клапан может продолжать еще некоторое время быть открытым (явление гистерезиса); и наоборот, при превышении  $P_y$  клапан может оставаться закрытым. Условием, гарантирующим открытие клапана, будет

$$P_i \geq P_y + \Delta P_{РЕГ} \quad (3.48)$$

При превышении максимальной пропускной способности золотник клапана, регулирующей проходное сечение, доходит до упора, после чего клапан начинает работать как обыкновенное местное сопротивление (3.36) с  $A=0$  и  $B=B_0$ , где  $B_0$  - сопротивление клапана в полностью открытом состоянии.

Очевидно, что условие, при котором клапан сохраняет свою регулируемую функцию

$$\rho \cdot B_0 Q^2 < P_y - P_K \quad (3.49)$$

### 3.7. Насосы

#### 3.7.1. Центробежный насос

Узел изображен на рис. 3.5, где труба  $i$  соответствует всасывающему патрубку, а труба  $k$  - напорному.

В общем виде работу насосов можно описать системой уравнений

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_H} = f_{HQ} \left( \frac{Q_H}{Q_{НОМ}}, \frac{w}{w_{НОМ}} \right), \quad (3.50)$$

где  $f_{QH}$  - полная (4-х квадрантная) напорно-расходная полная характеристика насоса [56],  $\Delta P = p_k^j - p_i^j$ ,  $Q_H$  - расход насоса,  $Q_{НОМ}$  - номинальный расход насоса,  $\Delta P_{НОМ}$  - номинальный перепад давления на насосе, соответствующий  $Q_H$ ,  $w_{НОМ}$  - номинальная частота вращения насоса.

Здесь  $w$  - частота вращения насоса, которая определяется из уравнения [36]

$$J \frac{dw}{dt} = M_{ЭД} - M_H, \quad (3.51)$$

где  $J$  - момент инерции на валу агрегата насос-электродвигатель,  $M_{ЭД}$  - момент, развиваемый электродвигателем.

Здесь  $M_H$  - момент сопротивления на валу насоса, который в общем случае задается функцией .

$$M_H = f_{JQ} \left( \frac{Q_H}{Q_{НОМ}}, \frac{w}{w_{НОМ}} \right), \quad (3.52)$$

где  $f_{JQ}$  - полная (4-х квадрантная) моментно - расходная характеристика насоса [56, 179].

Величина  $M_{эд}$  для мощных асинхронных электродвигателей может быть определена соотношением [5]:

$$M_{эд} = 2M_K / \left( \frac{S}{S_K} + \frac{S_K}{S} \right), \quad (3.53)$$

где  $M_K$  – критический момент электродвигателя,  $S_K$  – критическое скольжение.

Здесь

$$S = \frac{w_{НОМ} - w}{w_{НОМ}}, \quad (3.54)$$

где  $w_{НОМ}$  - частота вращения электромагнитного поля.

Ситуация отключения насоса (потеря привода) задается условием

$$M_{эд} = 0. \quad (3.55)$$

Характеристики насосов  $f_{QH}$  и  $f_{JQ}$  являются эмпирическими зависимостями, получаемыми на основании стендовых испытаний. Форма этих зависимостей определяется коэффициентом быстроходности насоса [56]. В работе приводятся эти функции для различных значений коэффициента быстроходности. В работе [179] предложена компактная форма представления функций  $f_{QH}$  и  $f_{JQ}$  в виде зависимостей обратных тригонометрических функций.

Для многих случаев работа насоса происходит в нормальном режиме практически с постоянной частотой вращения. Тогда работу насосов можно описывать упрощенным уравнением [179]:

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_H} = a + b \left( \frac{Q_H}{Q_{НОМ}} \right) + c \left( \frac{Q_H}{Q_{НОМ}} \right)^2, \quad (3.56)$$

где  $Q_H$  - расход насоса,  $Q_{НОМ}$  - номинальный расход насоса,  $\Delta P_{НОМ}$  - номинальный перепад давления на насосе, соответствующий  $Q_H$ ,  $a, b, c$  - коэффициенты, задающие характеристику насоса (характеристика аппроксимируется квадратным трехчленом).

Комбинируя узлы вышеприведенных типов (соединяя их короткими отрезками труб), можно описывать достаточно широкий класс граничных условий, удовлетворяющий практически все допустимые потребности проектировщиков.

### 3.7.2. Объемный насос (группа насосов).

Схематически узел представлен всё на том же рис. 3.5, где труба  $i$  соответствует всасывающему коллектору, труба  $k$  - напорному.

Узел может описывать как один насос, так и группу из  $n$  параллельно соединенных насосов с одинаковыми характеристиками и работающих в одинаковом режиме.

Работа такой группы насосов описывается уравнением:

$$Q_H = nWw - nK_g \frac{P_H - P_{BC}}{\mu}, \quad (3.57)$$

где  $Q_H$  - подача насоса в напорный коллектор,  $P_H$  - давление в нагнетательном патрубке,  $P_{BC}$  - давление во всасывающем патрубке,  $n$  - число параллельно работающих насосов,  $K_g$  - коэффициент утечек насоса ( из нагнетательной полости во всасывающую),  $W$  - рабочий объем насоса,  $w$  - частота вращения.

Частота вращения  $w$  также определяется из уравнения (3.51), где величина  $M_H$  определяется, согласно [5]:

$$M_H = \frac{P_H - P_{e.}}{\eta_{\Sigma}} W \eta_0, \quad (3.58)$$

где  $\eta_{\Sigma}$  - эффективный к.п.д. насоса,  $\eta_0$  - объемный к.п.д. насоса.

Для регулируемого насоса задается закон изменения подачи

$$\frac{dw}{dt} = f(P_H). \quad (3.59)$$

Заметим, что работу объемного насоса можно моделировать различным образом, в зависимости от целей исследования и требований к точности расчета. Так, наиболее полный учет всех факторов, влияющих на подачу насоса, осуществляется решением вышеописанной системы уравнений. Если

пренебречь колебаниями частоты вращения (при наличии достаточно мощного электродвигателя), то соотношение (3.51) можно заменить условием  $w=const$  и рассматривать одно уравнение (3.57). Если же при этом пренебрегать и утечками, то уравнение (3.57) заменяется соотношением  $Q_H = n \cdot W_0 \cdot w$ .

### 3.8. Потребитель

Потребитель является типичным объектом, например, для тепловых сетей [51] и изображён на рис. 3.6.

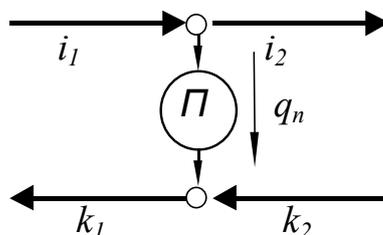


рис. 3.6

Функционирование потребителя описывается уравнениями:

$$p_{i_1} = p_{i_2} = p_{nag}, \quad p_{k_1} = p_{k_2} = p_{sl}, \quad Q_{i_1} = Q_{i_2} + q_{\Pi}, \quad Q_{k_1} = Q_{k_2} - q_{\Pi}, \quad q_{\Pi} = f_{\Pi}(p_{nag} - p_{sl}) \quad (3.60)$$

где  $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{k_1}, p_{k_2}$  – давления на концах труб  $i_1, i_2, k_1, k_2$ , примыкающих к узлу;  $Q_{i_1}, Q_{i_2}, Q_{k_1}, Q_{k_2}$  – расходы там же,  $q_{\Pi}$  – расход, потребляемый потребителем,  $f_{\Pi} = f_{\Pi}(t)$  – проводимость потребителя (известная функция времени).

Здесь собственные параметры узла

$$\bar{\Lambda} = \{p_{nag}, p_{sl}, q_n\}. \quad (3.61)$$

## ГЛАВА 4. РАЗРЫВ СПЛОШНОСТИ ПОТОКА ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ

### 4.1 Кавитация и кипение

Гидравлический удар в напорных трубопроводах влияет на их прочностные характеристики и является существенным фактором при оценке надежности работы трубопроводных систем [151, 157, 179].

С точки зрения возникновения критических нагрузок на трубопровод опасным является не только фаза повышения давления, но и фаза понижения. При некоторых значениях исходных параметров получается, что в потоке должны возникнуть отрицательные давления, т.е. напряжения на разрыв. Хотя специально очищенная жидкость выдерживает значительные отрицательные напряжения [32], однако в реальной жидкости всегда присутствуют микропузырьки (так называемые зародыши кавитации) [32]). При понижении давления ниже некоторой критической величины  $p_{cav}$  начинается рост этих пузырьков за счет испарения внутри их жидкости, а также, частично, за счет выделения растворенных в жидкости газов, в результате чего поток становится неоднородным – в жидкости возникают пузырьки и отдельные большие полости (каверны). В качестве критического давления, которое соответствует началу быстрого роста зародышей кавитации, без особой погрешности можно принять давление насыщенных паров рассматриваемой жидкости  $p_{нас}$ , т.е.  $p_{cav} \approx p_{нас}$ .

Это критическое давление (давление насыщенных паров жидкости) сильно зависит от температуры жидкости. Эта зависимость дается уравнением Клайперона – Клазиуса [170, 89]:

$$T_{нас} \frac{dT_{нас}}{dp_{нас}} = \frac{r}{\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}}, \quad (4.1)$$

где  $r$  – удельная теплота парообразования.

Таблица 4.1 содержит значения давлений насыщенных паров, плотности и теплоемкости для воды в некоторых характерных точках.

Из этой таблицы видно, что для нормальных условий ( $t \approx 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ) давление насыщенных паров жидкости  $p_{\text{нас}} \approx 0,02 \text{ атм}$ , т.е. практически равно нулю. Для  $100^\circ\text{C}$  давление насыщенных паров равно атмосферному, а для перегретой жидкости может достигать значения нескольких атмосфер. Т.е. для сильно нагретой или перегретой жидкости (например, в тепловых сетях) нарушение сплошности потока (вскипание) может наблюдаться и при достаточно высоких давлениях.

Таким образом, процесс вскипания и процесс кавитации в принципе, по своей физической сути, одинаковы, и отличаются только тем, что для невысоких температур, ввиду малой плотности пара, можно пренебречь наличием пара внутри пузырьков. В этих условиях движение стенок пузыря будет определяться только инерционными свойствами жидкости, окружающей полость, т.е. размеры такой полости будут полностью определяться параметрами жидкой фазы. Такие модели кавитации, следуя терминологии [26], будем называть инерционными.

Таблица 4.1. Теплофизические характеристики воды и водяного пара.

$t, \text{ }^\circ\text{C}$	$p_{\text{нас}}, \text{ МПа}$	Плотность пара, $\text{кг/м}^3$	Плотность жидкости, $\text{кг/м}^3$
0	0,000611	0,00485	999,9
20	0,002337	0,01732	998,3
80	0,04828	0,3026	972,0
100	0,1033	0,579	958,7
105	0,1232	0,74	954,7
120	0,20247	1,1	943,5
140	0,3685	1,92	926,3
160	0,6303	3,34	907,6
374,2	22,05	322,78	322,78

Последняя строка в таблице соответствует критической точке.

Итак, если в фазе понижения давления в жидкости достигается давление насыщенных паров, возникает разрыв сплошности потока (кавитация). При схлопывании каверн (на стадии повышения давления) возникают дополнительные всплески давления, опасные с точки зрения прочностных параметров трубопровода. При этом существенно меняется характер распространения волн в кавитирующей жидкости.

Для изучения свойств течений типа гидравлического удара, сопровождающихся разрывом сплошности, рассматривается модельная задача для простого трубопровода.

## 4.2 Постановка модельной задачи

### 4.2.1 Простой трубопровод

Рассматривается наклонный трубопровод длины  $L$ , по которому движется жидкость с постоянной скоростью  $V_0$  ( $V_0 > 0$ ), а на правом конце ( $x = L$ ) задано постоянное давление  $p_L = \rho g H_L + p_{вн}$ , где  $p_{вн}$  – внешнее давление (например, атмосферное):

$$p(L, t) = p_L \quad (4.2)$$

Будем считать уклон трубопровода постоянным:

$$i = -\frac{dz}{dx} = const \quad (4.3)$$

и пусть угол наклона оси трубопровода к горизонту равен  $\theta = const$ .

Не умаляя общности, можно считать, что начало координат совмещено с началом трубопровода, т.е.  $z_0 = 0$  и

$$z(x) = -i \cdot x = x \cdot \cos \theta. \quad (4.4)$$

В этом случае  $z(x)$  будет иметь смысл превышения точки трубопровода с координатой  $x$  над началом трубопровода.

Нестационарный процесс возникает вследствие мгновенного перекрытия сечения трубопровода на левом конце ( $x=0$ ):

$$V(0, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t > 0; \\ V_0, & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

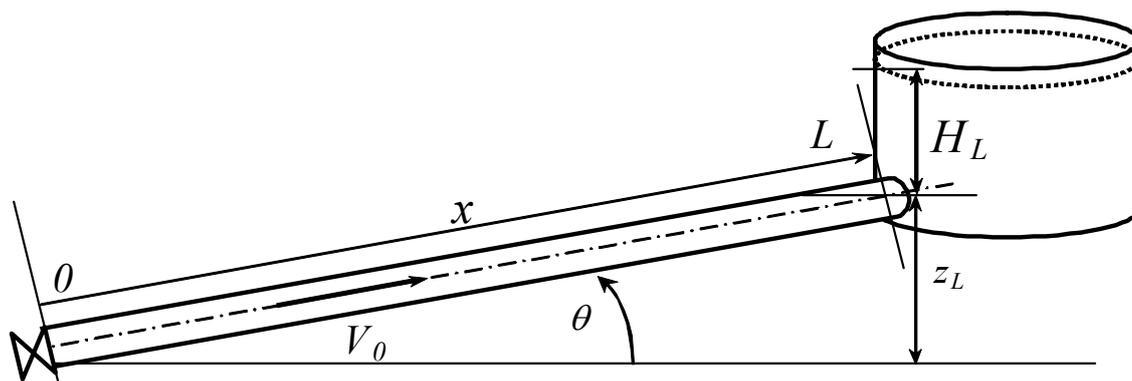


рис.4. 1

Течение жидкости описывается уравнениями гидравлического удара (2.32) - (2.33), см. [59, 182].

Начальными данными будут параметры установившегося движения:

$$p(x,0) = p_L + \rho \frac{\lambda_0 V_0^2}{2d} \cdot (L-x) + \rho g(z_L - z(x)), \quad V(x,0) = V_0 \quad (4.6)$$

где  $\lambda_0 = \lambda_0(V_0)$ .

Переходя к напору  $h$  (см. п. 2.5.2), систему уравнений, описывающих течение в трубопроводе, можно записать в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -\lambda \frac{|V|V}{2d}, \quad (4.7)$$

В терминах напора граничное условие (4.6) на правой границе ( $x=L$ ) можно записать в виде:

$$h(L,t) = H_L + z_L + \frac{p_{\text{вн}}}{\rho g}, \quad (4.8)$$

где  $z_L = z(L)$  – отметка правого конца трубопровода,  $p_{\text{вн}}$  – внешнее давление (например, атмосферное).

Начальными данными, в соответствии с (4.6), будут

$$h(x,0) = h_L + \frac{\lambda_0 V_0^2}{2gd} \cdot (L-x), \quad V(x,0) = V_0, \quad (4.9)$$

где  $\lambda_0 = \lambda_0(V_0)$ .

Условием сохранения сплошности потока, согласно предыдущему пункту, будем считать неравенство

$$p(x,t) \geq p_{cav}, \quad (4.10)$$

где  $p_{cav}$  – давление насыщенных паров жидкости ( $p_{cav} \ll p_L$ ), или

$$h(x,t) \geq h_{cav}(x). \quad (4.11)$$

где

$$h_{cav}(x) = \frac{p_{cav}}{\rho g} + z(x). \quad (4.12)$$

Линия  $h_{cav}(x)$  будет представлять собой линию, параллельную оси трубопровода и проходящую выше ее на  $p_{cav}/\rho g$ ; для воды в нормальных условиях ( $t = 20^\circ C$ ) величина  $p_{cav}/\rho g \approx 0,24$  м.

Предполагается, что в начальный момент времени исходный стационарный режим течения лежит выше порога возникновения кавитации (4.12), т.е.

$$h(x,0) = h_0(x) = h_L + \frac{\lambda_0 V_0^2}{2gd} \cdot (L-x) > h_{cav}(x), \quad (4.13)$$

Систему уравнений (4.7) можно записать в инвариантах Римана [137]:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} = -B \cdot (r + s), \quad \frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} = -B \cdot (r + s), \quad (4.14)$$

где  $r$  и  $s$  – инварианты Римана [137],

$$r = (h + a \cdot V/g)/2, \quad s = (-h + a \cdot V/g)/2. \quad (4.15)$$

Здесь

$$B = \frac{\lambda|V|}{4d} > 0 \quad \text{при } V \neq 0, \quad (4.16)$$

при этом функция  $B(|V|)$  является возрастающей функцией  $|V|$ .

Из формул (4.12) следует:

$$h = r - s, \quad V = \frac{g}{a}(r + s). \quad (4.17)$$

Учитывая эти соотношения, граничные условия (4.4) и (4.8) будут выглядеть, соответственно, как

$$s(L,t) = r(L,t) - h_L \quad (4.18)$$

и

$$r(0,t) = \begin{cases} -s(0,t) & , \text{ при } t > 0; \\ -s(0,t) + \frac{a}{g}V_0 & , \text{ при } t \leq 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Начальные данные (4.9) в переменных (4.15) превращаются в

$$r_0(x) = \frac{1}{2} \left( h_L + \frac{a}{g} V_0 \right) + \frac{\lambda V_0^2}{4gd} \cdot (L-x), \quad s_0(x) = \frac{1}{2} \left( -h_L + \frac{a}{g} V_0 \right) - \frac{\lambda V_0^2}{4gd} \cdot (L-x). \quad (4.20)$$

#### 4.2.2 Одиночная каверна

Предполагается, что каверна представляется собой полость, имеющую плоские, перпендикулярные к оси трубы стенки, и занимающую все поперечное сечение трубопровода, размеры которой малы по сравнению с  $L$ . (см. рис.4.2). Плотностью насыщенных паров жидкости в каверне пренебрегаем.

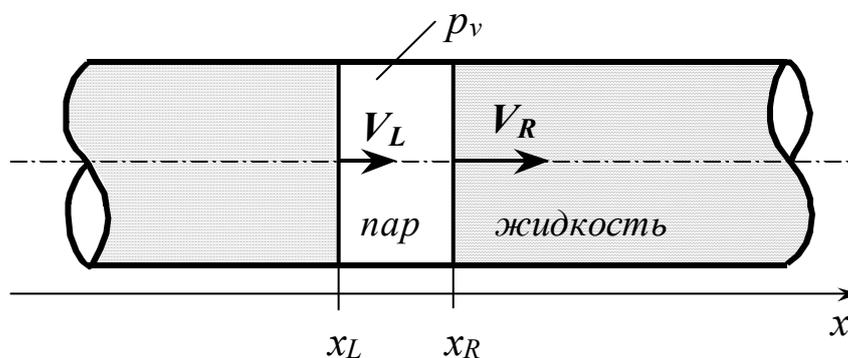


рис.4.2

Тогда перемещение левой  $x_L$  и правой  $x_R$  границ такой полости определяется уравнениями

$$\frac{dx_L}{dt} = V_L = V(x_L, t), \quad \frac{dx_R}{dt} = V_R = V(x_R, t) \quad (4.21)$$

где  $V_L$  и  $V_R$  – скорости жидкости на границе каверны.

Размер полости (каверны) определяется формулой

$$W_{cav}(t) = \omega \int_{t_{bc}}^t \{V_R(\tau) - V_L(\tau)\} d\tau, \quad (4.22)$$

где  $t_{bc}$  – время образования каверны,  $\omega$  – площадь поперечного сечения трубы.

Время схлопывания каверны  $t_{clp}$  определяется равенством

$$W_{cav}(t_{clp}) = 0. \quad (4.23)$$

На границах каверны ставятся условия

$$p(x_L, t) = p(x_R, t) = p_{cav} \quad (4.24)$$

или, в терминах напора:

$$h(x_L, t) = h_{cav}(x_L), \quad h(x_R, t) = h_{cav}(x_R) \quad (4.25)$$

#### 4.2.3. Идеальная жидкость ( $\lambda = 0$ )

##### 4.2.3.1 Решение без учета разрыва сплошности потока.

В этом случае легко найти решение смешанной задачи для системы (4.14) с граничными условиями (4.18) – (4.19) и начальными данными (4.20). Действительно, из (4.14) следует, что инварианты  $r$  и  $s$  будут постоянны вдоль соответствующих характеристик  $x = at + const$  и  $x = -at + const$ . Используя этот факт, начальные данные (4.20), граничные условия (4.18) – (4.19) и соотношения (4.17), легко построить области постоянства значений  $h$  и  $V$ .

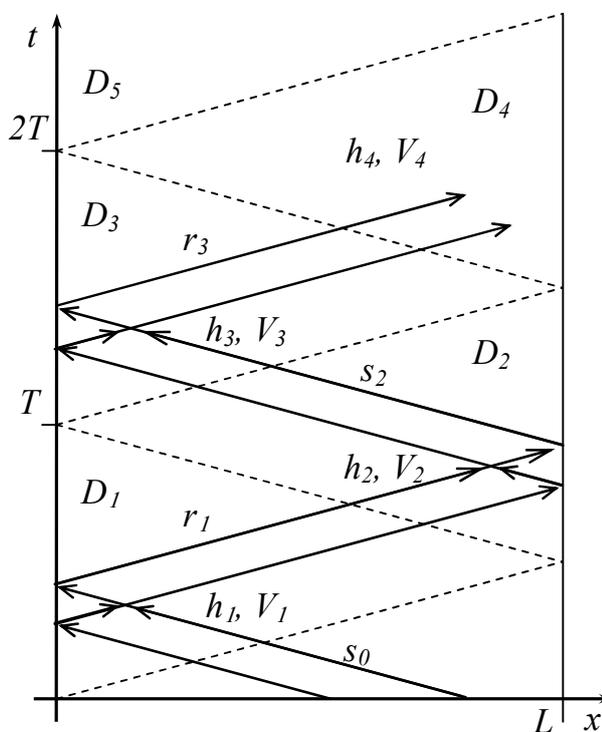


рис.4.3

Схема решения представлена на рис.4.3; в соответствии с ней решением задачи будут функции

$$r_{2k+1} = \frac{1}{2} \left( h_L + (-1)^{k+1} \frac{a}{g} V_0 \right), \quad \text{при } kT + x/a < t \leq (k+1)T + x/a; \quad (4.26)$$

$$s_{2k} = \frac{1}{2} \left( -h_L + (-1)^k \frac{a}{g} V_0 \right), \quad \text{при } kT - x/a < t \leq (k+1)T - x/a,$$

где  $0 \leq x \leq L; k = 0, 1, 2, \dots$

Из формул (4.26) и (4.17) следует, что в областях  $D_{2k}$ , определяемых системой неравенств:

$$Tk - \frac{x}{a} < t \leq Tk + \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{где } k=0,1,2,\dots, \quad (4.27)$$

параметры потока имеют вид

$$h_{2k}(x,t) = r_{2k-1} - s_{2k} = h_L, \quad V_{2k}(x,t) = \frac{g}{a}(r_{2k-1} + s_{2k}) = (-1)^k V_0, \quad (4.28)$$

а в областях  $D_{2k+1}$ , определяемых системой неравенств:

$$Tk + \frac{x}{a} < t \leq T \cdot (k+1) - \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad \text{где } k=0,1,2,\dots, \quad (4.29)$$

параметры потока равны

$$h_{2k+1}(x,t) = r_{2k+1} - s_{2k} = h_L + (-1)^{k+1} \frac{a}{g} V_0, \quad V_{2k+1}(x,t) = \frac{g}{a}(r_{2k+1} + s_{2k}) = 0. \quad (4.30)$$

Здесь

$$T = \frac{2L}{a} \quad (4.31)$$

– период волны гидравлического удара, т.е., в данном случае, время пробега волны гидравлического удара от задвижки до резервуара и обратно.

Из вышеприведённых формул следует, что решение задачи носит периодический характер, при этом максимальные и минимальные напоры будут равны, в соответствии с формулой Н.Е.Жуковского [59]:

$$h_{\max} = h_L + \frac{a}{g} V_0, \quad h_{\min} = h_L - \frac{a}{g} V_0. \quad (4.32)$$

#### 4.2.3.2 Решение с учетом разрыва сплошности потока

Нарушение условия сплошности потока (4.11) будет иметь место, если линия  $h_{\min}$  частично или полностью будет лежать ниже линии  $h_{cav}$  (см. рис.4.4), т.е.

$$\exists x \in [0, L] \mid h_{\min} = h_L - \frac{a}{g} V_0 < h_{cav}(x). \quad (4.33)$$

при этом из условия (4.13) справедливо что

$$h_L > h_{cav}(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq L, \quad \text{в том числе } h_L > h_{cav}(0). \quad (4.34)$$

Различные схемы образования разрыва сплошности потока представлены на рис.4.4.

4.2.3.3 Отрицательный уклон ( $dz/dx > 0, \theta > 0$ ).

а) Случай  $h_{min} < h_{cav}(0)$ .

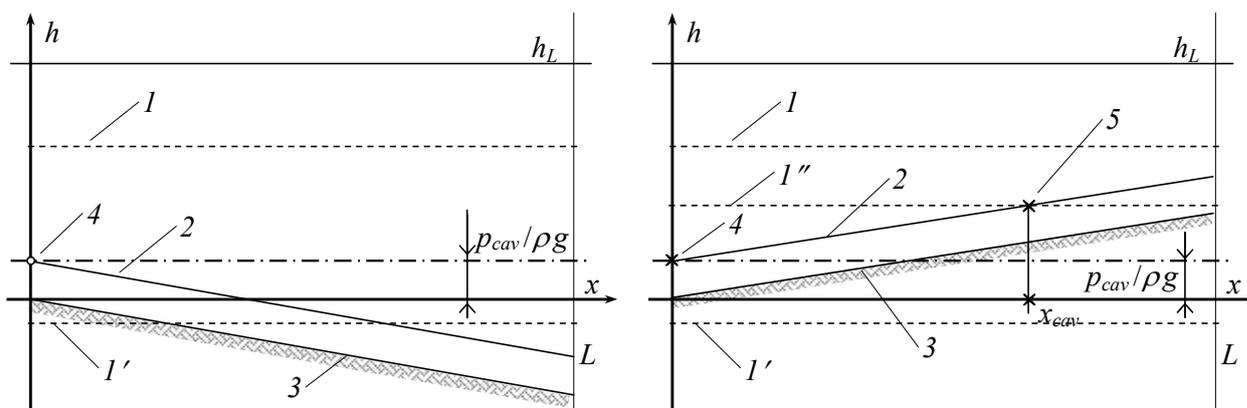
Это означает, что кавитация возникает сразу у задвижки. Предположим, что у левой границы образуется полость, описываемая уравнениями (4.21) – (4.25), при  $V_L = 0, x_L = 0$  и  $t_{bc} = 0$ . Используя граничное условие (4.25) вместо (4.19), аналогично предыдущему случаю можно найти решение задачи в области  $D_I$  при  $t > 0$ , учитывая, что  $s_I = s_0$  и определяется по (4.26):

$$r_1 = h_{cav}(x_R) - \frac{1}{2} \left( h_L - \frac{a}{g} V_0 \right). \quad (4.35)$$

Отсюда следует, что скорость правой границы каверны:

$$V_R = V_1 = V_0 - \frac{g}{a} (h_L - h_{cav}(x_R)). \quad (4.36)$$

Из условия (4.34) следует, что  $V_R < V_0$ , а из условия  $h_{min} < h_{cav}(0)$  следует неравенство  $0 < V_R$ , что гарантирует начальный рост каверны.



а)  $i \geq 0$

б)  $i < 0$

рис.4.4 Схема возникновения кавитации.

Здесь:  $1, 1', 1''$  – различные уровни величины  $h_{min}$ ;  $2$  – линия  $h_{cav}$ ;  $3$  – трубопровод;  $4, 5$  – точки первоначального возникновения кавитации.

Напор справа от каверны будет равен

$$h_1 = h_{cav}(x_R). \quad (4.37)$$

Если в точке возникновения каверны трубопровод имеет отрицательный уклон, т.е.

$$\frac{dh_{cav}}{dx}(x_R) = \frac{dz}{dx}(x_R) > 0, \quad (4.38)$$

то справа от каверны будет справедливо (в некоторой окрестности точки  $x_R$ ):

$$h_1 = h_{cav}(x_R) < h_{cav}(x) \text{ при } x_R < x, \quad (4.39)$$

т.е. условие сплошности потока (4.11) будет по-прежнему не выполняться.

Это говорит о том, что в данном случае модели одиночной каверны (4.21) – (4.25) недостаточно для описания явления разрыва сплошности потока, и наряду с каверной у задвижки справа от неё будет существовать обширная область мелкопузырьковой кавитации, которая будет распространяться вправо со скоростью волны гидравлического удара.

б) Случай  $h_{min} \geq h_{cav}(0)$ .

Пусть выполняется условие (4.33) и  $x_0$  – нижняя грань значений  $x$ , для которых справедливо (4.33), т.е.  $x_0$  – граница между областью с бескавитационным и кавитационным течением:

$$h_L - \frac{a}{g}V_0 \geq h_{cav}(x) \text{ при } x \leq x_0 \text{ и } h_L - \frac{a}{g}V_0 < h_{cav}(x) \text{ при } x > x_0. \quad (4.40)$$

Учитывая граничное условие, можно определить

$$x_0 = \frac{h_{min} - p_{cav}/\rho g}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \left( h_L - \frac{p_{cav}}{\rho g} - \frac{a}{g}V_0 \right) \quad (4.41)$$

Неравенства (4.40) гарантируют, что  $0 \leq x_0 < L$ .

Предположим, что в точке  $x_0$  образуется полость, описываемая моделью одиночной каверны (см. п. 4.2.2). Используя граничные условия (4.25), и учитывая, что на левую границу каверны приходит инвариант  $r_1$ , а на правую границу приходит инвариант  $s_0$ , определяемые по формулам (4.26), получаем значения отраженных инвариантов  $s'_1$  и  $r'_1$  соответственно:

$$s'_1 = \frac{1}{2} \left( h_L - \frac{a}{g}V_0 \right) - h_{cav}(x_L), \quad r'_1 = h_{cav}(x_R) - \frac{1}{2} \left( h_L - \frac{a}{g}V_0 \right) \quad (4.42)$$

Очевидно, что напоры слева и справа от каверны:

$$h_L = h_{cav}(x_L), \quad h_R = h_{cav}(x_R) \quad (4.43)$$

откуда видно, что слева от каверны (при  $x < x_L$ ) выполняется условие (4.11), т.е. соблюдается условие сплошности потока, и течение является однофазным. Справа от каверны (при  $x_R < x$ ), наоборот, условие (4.11) не выполняется, что говорит о развитии там мелкопузырьковой кавитации.

Из (4.42), (4.26) и условия (4.40) можно найти скорости границ каверны:

$$\begin{aligned} V_L &= \frac{g}{a} \left( h_L - \frac{a}{g} V_0 - h_{cav}(x_L) \right) = \frac{g}{a} (h_{cav}(x_0) - h_{cav}(x_L)), \\ V_R &= \frac{g}{a} \left( -h_L + \frac{a}{g} V_0 + h_{cav}(x_R) \right) = \frac{g}{a} (h_{cav}(x_R) - h_{cav}(x_0)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

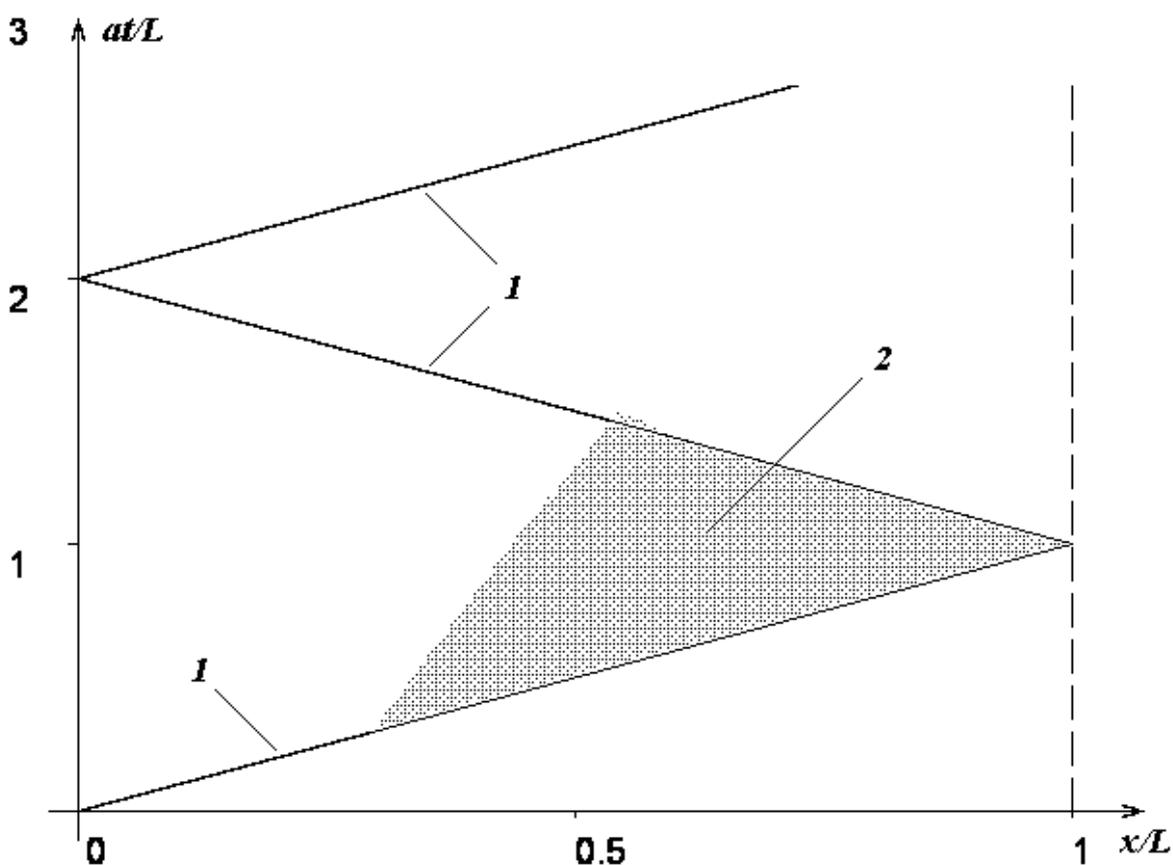


рис.4.5. Возникновение мелкопузырьковой кавитации при отрицательном уклоне трубопровода.

1 – линии характеристик; 2 – зона мелкопузырьковой кавитации.

Для наклонного трубопровода с постоянный уклоном можно записать:

$$V_L = g(x_0 - x_L) \sin \theta / a, \quad V_R = g(x_R - x_0) \sin \theta / a \quad (4.45)$$

Учитывая, что в начальный момент  $x_L = x_R = x_0$ , из условия (4.21) и (4.45) следует, что

$$V_L = V_R = 0, \quad (4.46)$$

т.е. каверна будет вырожденной и представляет собой границу раздела между однофазным и мелкопузырьковым течением, распространяющуюся вправо (см. рис.4.5).

#### 4.2.3.4 Неотрицательный уклон ( $dz/dx \leq 0, \theta \leq 0$ ).

В этом случае, ввиду невозрастания функции  $h_{cav}(x)$ , из (4.33) следует, что первоначальное нарушение сплошности потока наступает при  $t = 0$  у задвижки. Предположим, аналогично предыдущему случаю, что у левой границы образуется полость, описываемая уравнениями (4.21) – (4.25), при  $V_L = 0, x_L = 0$  и  $t_{bc} = 0, x_{bc} = 0$ . Используя граничное условие (4.25), аналогично предыдущему случаю, находим решение для  $r_l$  и  $V_R$ . Напор справа от каверны так же будет определяться по формуле (4.37), однако, т.к. для рассматриваемого случая  $h_{cav}(x)$  является невозрастающей функцией, справа от каверны будет всюду выполняться условие сплошности потока (4.11).

Это говорит о том, что в данном случае явление разрыва сплошности потока можно описывать моделью одиночной каверны (4.21) – (4.25), возникающей у задвижки.

а) Параметры каверны.

Обозначим

$$K = \frac{\rho a V_0}{\rho g h_L - p_{cav}} = N + q \quad (4.47)$$

где  $N$  – целая часть числа  $K$ ,  $q$  – дробная часть  $K$ .

Из (4.33) и (4.12) следует, что при

$$K > 1 \quad (4.48)$$

у левой границы ( $x=0$ ) при  $t>0$  будет  $p(x,t) < p_{cav}$ , т.е. нарушается условие сплошности потока (4.11).

Введем понятие критической скорости

$$V_{cr} = \frac{\rho g h_L - p_{cav}}{\rho a}, \quad (4.49)$$

при превышении которой наступает разрыв сплошности потока, т.е. условие появления разрыва сплошности потока, наряду с (4.48), может быть сформулировано следующим образом:

$$V_0 > V_{cr}. \quad (4.50)$$

Из (4.47) и (4.49) очевидно, что

$$K = \frac{V_0}{V_{cr}}. \quad (4.51)$$

Итак, при выполнении (4.48) (или (4.50)) разрыв сплошности в виде одиночной каверны первоначально образуется в точке  $(0,0)$ , т.е.  $t_{bc} = 0$  и  $x_{bc} = 0$ .

Используя граничное условие (4.43), можно найти решение задачи в интервале  $0 < t < t_{clp}$  (см. схему на рис.4.3):

$$r_{2k-1} = \frac{1}{2} \left[ 2kh_{cav}(0) - (2k-1)h_L + \frac{a}{g} V_0 \right], \quad s_{2k} = \frac{1}{2} \left[ 2kh_{cav}(0) - (2k+1)h_L + \frac{a}{g} V_0 \right] \quad (4.52)$$

для  $k = 0, 1, \dots$

При выводе этих соотношений предполагалось, что, так как размеры каверны малы по сравнению с длиной трубопровода, т.е.  $x_R/L \ll 1$ , можно считать, что  $h_{cav}(x_R) \approx h_{cav}(0)$ .

Из формул (4.52), (4.17) и (4.49) следует, что в областях  $D_{2k}$  параметры потока имеют вид

$$h_{2k}(x, t) = r_{2k-1} - s_{2k} = h_L, \quad V_{2k}(x, t) = \frac{g}{a} (r_{2k-1} + s_{2k}) = V_0 - 2kV_{cr}, \quad (4.53)$$

а в областях  $D_{2k-1}$  параметры потока равны

$$h_{2k-1}(x, t) = r_{2k-1} - s_{2(k-1)} = h_{cav}(0), \quad V_{2k-1}(x, t) = \frac{g}{a} (r_{2k-1} + s_{2(k-1)}) = V_0 - (2k-1)V_{cr}. \quad (4.54)$$

где  $k = 1, 2, \dots$

Ввиду невозрастания функции  $h_{cav}(x)$  справедливо  $h_{cav}(0) \geq h_{cav}(x)$ , следовательно, по формуле (4.54) имеем  $h_{2k-1}(x, t) \geq h_{cav}(x)$ , и условие сохранения

сплошности потока (4.11) выполняется во всей области  $D_{2k-1}$ . В областях  $D_{2k}$  это условие тем более выполняется, в силу условия (4.13) и соотношения (4.53).

Таким образом, в данном случае при  $0 < t < t_{clp}$  во всей остальной области течения соблюдается условие (4.11), т.е. кавитацию можно локализовать в виде одной изолированной каверны в начале трубопровода.

Оценим время жизни каверны.

Легко определить, учитывая (4.54), (4.31) и (4.47), что в этом случае:

$$V_L = 0, \quad V_R = V_0 - (2k-1) \cdot V_{cr} \quad \text{при} \quad (k-1)T < t \leq kT, \quad (4.55)$$

где  $k = 1, \dots, N$ .

Подставляя (4.55) в (4.49), из (4.23) можем определить момент схлопывания каверны:

$$t_{clp} = T \cdot N \cdot \frac{N+1}{N+1-q}. \quad (4.56)$$

б) Фаза повышения давления после схлопывания каверны (случай  $i \geq 0$ )

После схлопывания каверны восстанавливается граничное условие (4.19)); используя описанную выше методику, можно найти решение задачи при  $t_{clp} \leq t$ .

Картина после схлопывания каверны в плоскости  $(x, t)$  изображена на рис.4.6. Область влияния левой границы после схлопывания каверны расположена выше линии характеристик  $AB$  (см. рис.4.6,  $a$ ), т.е. в области

$$t \geq t_{clp} + x/a, \quad (4.57)$$

поэтому ниже этой линии решение задачи определяется по формулам (4.52) – (4.54) при  $k \leq N+1$ .

Используя граничные условия (4.18) – (4.19), а также соотношения (4.17) и (4.47) – (4.49), можно получить решения, согласно схеме рис.4.6,  $a$ ):

$$h_1^* = h_L + \frac{a}{g} V_0 - 2q(h_L - h_{cav}(0)) = h_L + (N-q)(h_L - h_{cav}(0)), \quad V_1^* = 0 \quad (4.58)$$

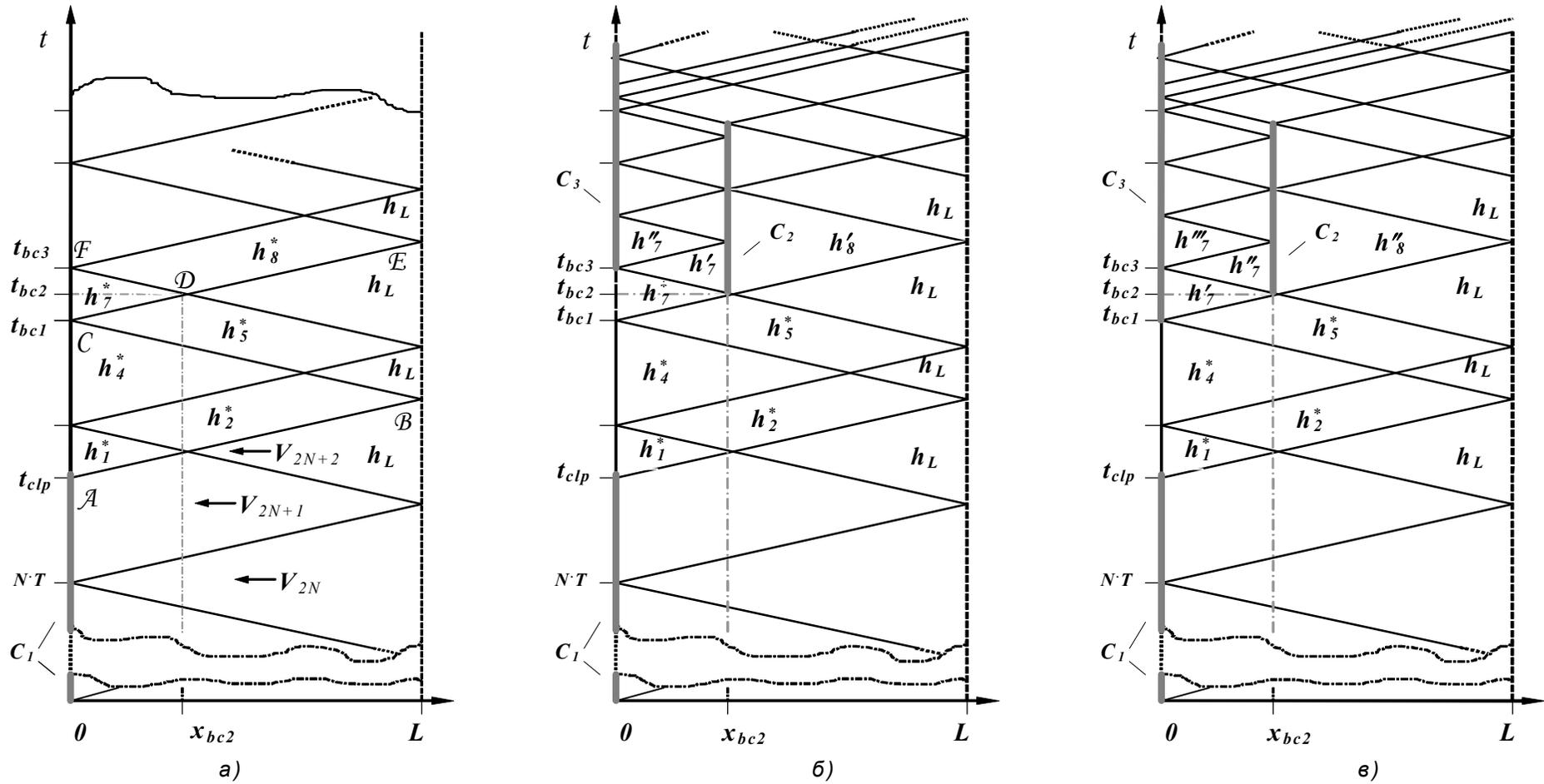


рис.4.6.

Схлопывание первичной каверны и возникновение вторичной кавитации (  $\bar{б}$  – случай  $N=1$ ,  $\bar{в}$  – случай  $N>1$  ).  
 $C_1$  – первичная каверна;  $C_2, C_3$  – вторичные каверны.

Т.к.  $0 \leq q < 1$ , отсюда видно, что  $h_1^*$  лежит в интервале

$$h_L + (N-1)(h_L - h_{cav}(0)) < h_1^* \leq h_L + \frac{a}{g} V_0. \quad (4.59)$$

Далее, имеем

$$h_2^* = h_L + \frac{a}{g} V_0 + (1-2q) \cdot (h_L - h_{cav}(0)) = h_L + (N+1-q)(h_L - h_{cav}(0)), \quad V_2^* = -V_{cr} \quad (4.60)$$

при этом величина  $h_2^*$  лежит в интервале

$$h_L + N(h_L - h_{cav}(0)) < h_2^* \leq h_L + \frac{a}{g} V_0 + (h_L - h_{cav}(0)). \quad (4.61)$$

Для участка, примыкающего к правой границе, имеем

$$h_3^* = h_L, \quad V_3^* = -V_0 + 2NV_{cr} = V_0 - 2qV_{cr} = (N-q)V_{cr}. \quad (4.62)$$

Аналогично, имеем

$$h_4^* = h_L + \frac{a}{g} V_0 + 2(1-q) \cdot (h_L - h_{cav}(0)), \quad V_4^* = 0, \quad (4.63)$$

при этом  $h_4^*$  лежит в интервале

$$h_L + \frac{a}{g} V_0 < h_4^* \leq h_L + \frac{a}{g} V_0 + 2(h_L - h_{cav}(0)). \quad (4.64)$$

В области 5 (см. рис.4.6, а) имеем

$$h_5^* = h_L + (h_L - h_{cav}(0)), \quad V_5^* = V_0 + (1-2q)V_{cr} = (N+1-q)V_{cr}, \quad (4.65)$$

а также

$$h_6^* = h_L, \quad V_6^* = -V_0 + 2(N+1)V_{cr} = V_0 + 2(1-q)V_{cr}. \quad (4.66)$$

В области 7 (см. рис.4.6., а) имеем

$$h_7^* = h_L + \frac{a}{g} V_0 - 2N(h_L - h_{cav}(0)) = h_{cav}(0) + (1+q-N) \cdot (h_L - h_{cav}(0)), \quad V_7^* = 0. \quad (4.67)$$

Т.к.  $0 \leq q < 1$ , из последней формулы видно, что  $h_7^*$  лежит в интервале

$$h_{cav}(0) + (1-N) \cdot (h_L - h_{cav}(0)) \leq h_7^* < h_{cav}(0) + (2-N) \cdot (h_L - h_{cav}(0)) \quad (4.68)$$

И, наконец, для области 8 (см. рис.4.6, а) получаем

$$h_8^* = h_L + \frac{a}{g} V_0 - (2N+1)(h_L - h_{cav}(0)) = h_{cav}(0) - (N-q) \cdot (h_L - h_{cav}(0)), \quad V_8^* = V_{cr} \quad (4.69)$$

Т.к.  $0 \leq q < 1$ , из последней формулы следует, что  $h_8^*$  лежит в интервале

$$h_{cav}(0) - N \cdot (h_L - h_{cav}(0)) \leq h_8^* < h_{cav}(0) - (N-1) \cdot (h_L - h_{cav}(0)). \quad (4.70)$$

Из вышеприведенных формул и оценок (4.67) – (4.70), с учетом того, что  $h_{cav}(0) \geq h_{cav}(x)$  при  $x > 0$ , и условия (4.34), получаем, что в области, лежащей ниже линии характеристик  $CE$  (см. рис.4.6,  $a$ ), т.е. в области

$$t < t_{clp} + T + x/a, \quad (4.71)$$

всюду гарантированно выполняется условие сплошности потока (4.11).

Согласно (4.58), (4.60), (4.62) и (4.63) имеем  $h_1^* < h_2^* < h_4^*$ , причем скачок между ними равен постоянной величине  $h_L - h_{cav}(0)$ :

$$h_2^* - h_1^* = h_L - h_{cav}(0), \quad h_4^* - h_2^* = h_L - h_{cav}(0). \quad (4.72)$$

Тогда, из (4.58) – (4.69) имеем, что максимальное давление после схлопывания каверны будет

$$h_{max} = h_4^* = h_L + a \cdot V_0 / g + 2(1 - q) \cdot (h_L - h_{cav}(0)). \quad (4.73)$$

Здесь первые два слагаемых  $h_L + aV_0/g$  представляют собой классическую формулу Н.Е.Жуковского [59] для определения ударного давления в случае однородного течения (без разрыва сплошности), а последнее слагаемое – добавку к ударному давлению вследствие разрыва сплошности, которая представляет собой величину, колеблющуюся от 0 до  $2 \cdot (h_L - h_{cav}(0))$ , в зависимости от начальной скорости  $V_0$ . Таким образом, формула (4.73) показывает, что зависимость  $h_{max}$  от  $V_0$  представляет собой пилообразную линию (см. рис. 4.7); т.е. в отличие от случае сплошного течения максимальное давление может падать с ростом начальной скорости  $V_0$ ! Добавка вследствие наступления кавитации может достигать значительной величины, но не превосходит  $2 \cdot (h_L - h_{cav}(0))$ .

График, аналогичный изображенному на рис. 4.7, был впервые получен в работе [118, 117], но методика его получения была не вполне ясна.

На рис.4.8 – рис.4.9 представлены графики поведения давления у задвижки для различных начальных скорости, построенные по вышеприведённым формулам.

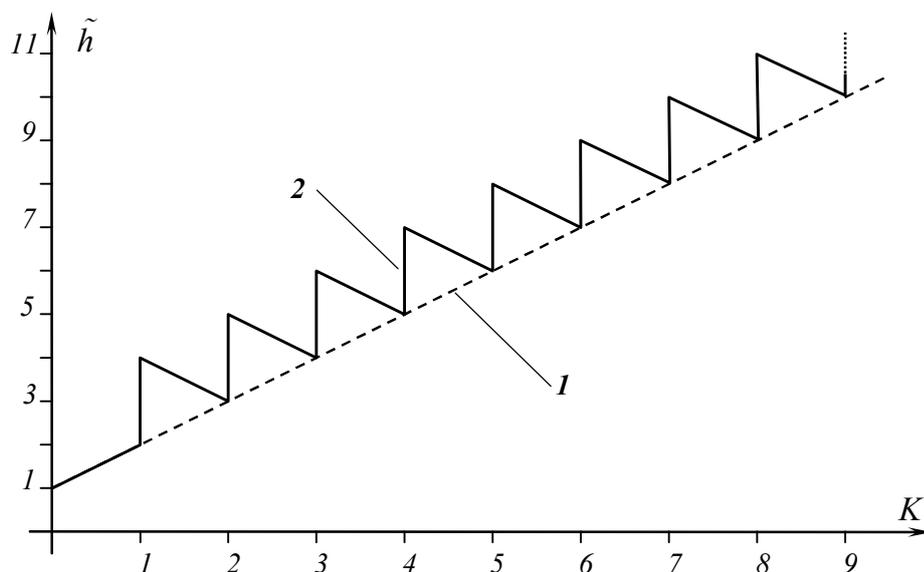


рис. 4.7. Максимальные давления в трубопроводе после схлопывания первичной каверны.

1 – максимальное давление по формуле Н.Е.Жуковского;  
 2 – максимальное давление по формуле (4.73). Здесь  $\tilde{h} = (h_{\max} - h_{cav}(0))/(h_L - h_{cav}(0))$ .

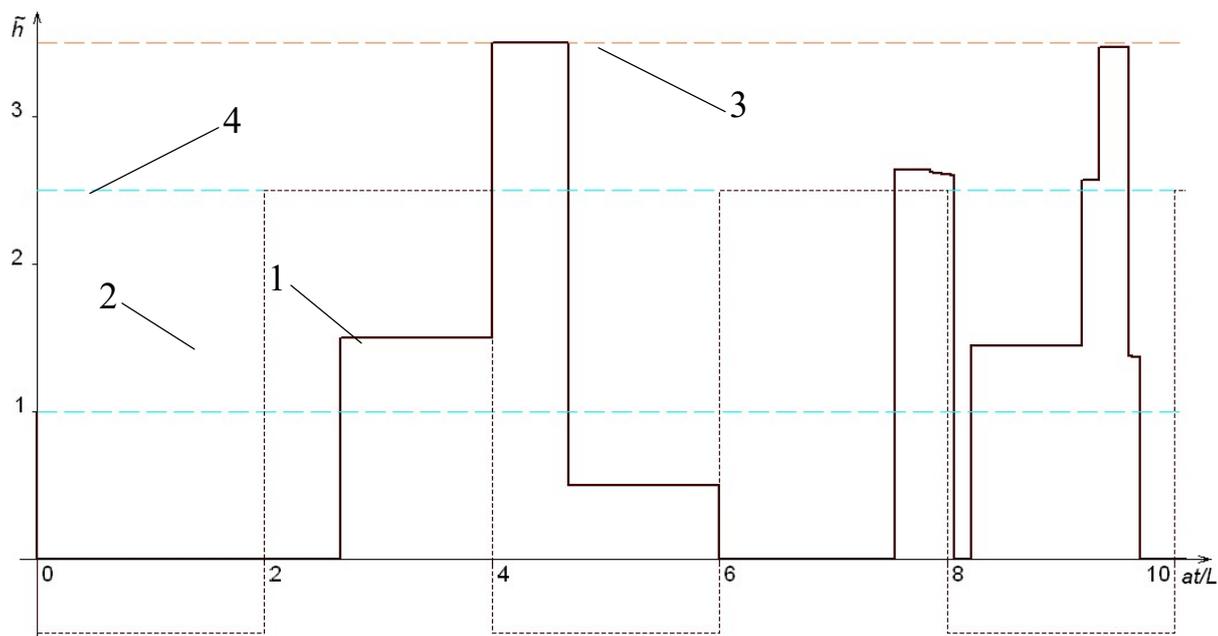


рис.4.8. Давление у задвижки при  $K = V/V_{cr} = 1,4$ :

1 – с учетом разрыва сплошности; 2 – без учета разрыва сплошности потока;  
 3 – максимальное давление по формуле (4.73); 4 – максимальное давление по формуле Н.Е.Жуковского.

Таким образом, давление у задвижки после схлопывания каверны достигает своего максимума не в начальной стадии, а ближе к окончанию фазы повышения давления (область 4).

Это отчетливо видно на графиках поведения давления вблизи задвижки, представленных на рис.4.8 – рис.4.9 (кривая 1), рассчитанных на основании вышеприведенных формул. Здесь  $\tilde{h} = (h - h_{cav}(0)) / (h_L - h_{cav}(0))$ .

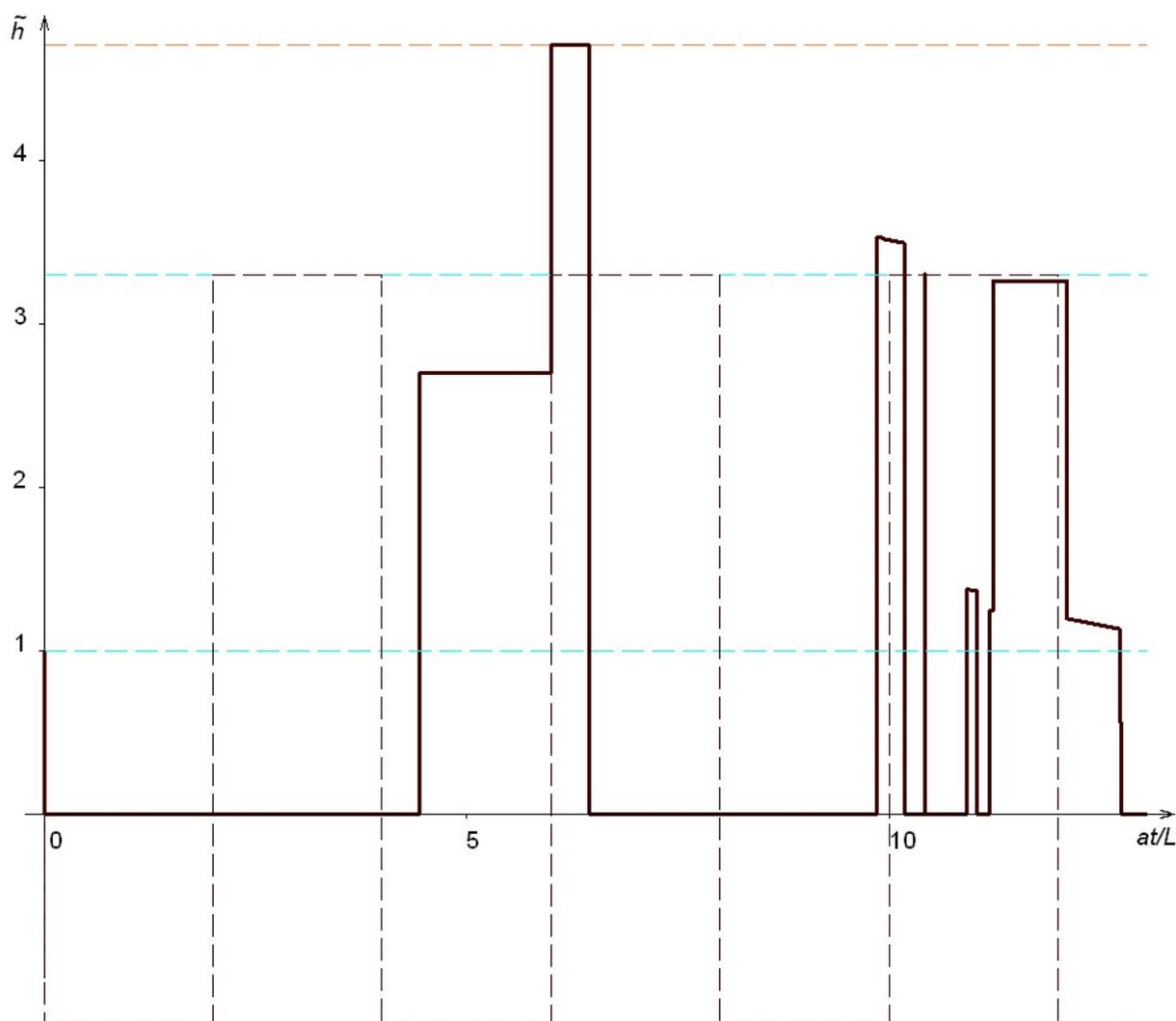


рис.4.9. Давление у левого конца трубопровода (у задвижки) при  $K = V/V_{cr} = 2,3$ . Обозначения те же, что и на рис.4.8.

На рис.4.10 представлены результаты экспериментов [145], на которых также отчетливо виден всплеск в конце фазы повышения давления.

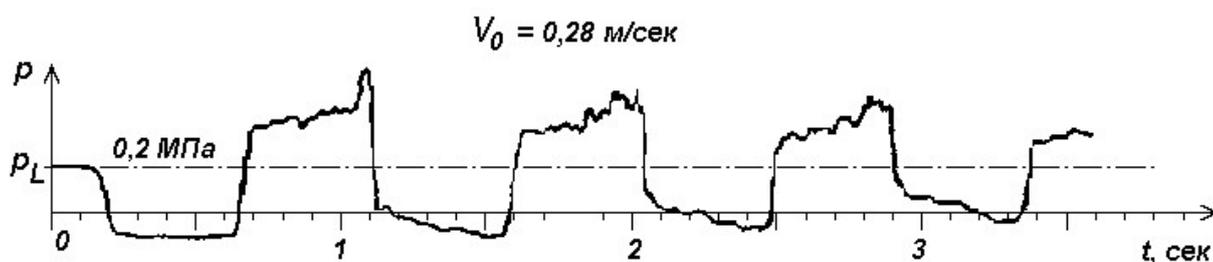


рис.4.10.

Замечание 1. Если использовать для оценки максимального давления формулу Н.Е.Жуковского, то получается, с учетом знака скорости:

$$h_{\max} = h_L - \frac{a}{g} V_c, \quad (4.74)$$

где  $V_c$  – скорость «оторвавшегося» столба жидкости.

По причине волновых процессов, столб жидкости в момент подхода к задвижке имеет две скорости:  $V_{2N+1}$  и  $V_{2N}$  при  $q < 0,5$ ; либо  $V_{2N+1}$  и  $V_{2N+2}$  при  $q \geq 0,5$  (см. рис.4.6, а), и только в моменты времени, когда  $q = 0$ , столб жидкости движется как единое целое с одинаковой по длине скоростью  $V_{2N}$ . Если в формулу (4.74) вместо  $V_c$  подставить  $V_{2N}$ , получаем в качестве  $h_{\max}$  величину  $h_1^*$ ; если в формулу (4.74) вместо  $V_c$  подставить  $V_{2N+1}$ , получаем величину  $h_2^*$ ; и, наконец, если вместо  $V_c$  в (4.74) подставить  $V_{2N+2}$ , получаем в качестве  $h_{\max}$  величину  $h_4^*$ , т.е. действительно максимальное значение.

Таким образом, максимальное давление после схлопывания каверны наблюдается не непосредственно после удара оторвавшегося столба жидкости, а через некоторый момент времени, равный  $T(N+1)(1-q)/(N+1-q)$ , на последней стадии фазы повышения давления. Это объясняется тем, что после схлопывания каверны, вследствие инерции часть потока жидкости продолжает двигаться так, как будто каверна еще существует. Волна от этой (уже схлопнувшейся) каверны, отразившись от правой границы, возвращается к задвижке в момент времени, лежащем в интервале

$$(N+1)T < t \leq t_{clp} + T. \quad (4.75)$$

Именно эта волна, при отражении от закрытой задвижки, и порождает максимальное давление. При этом, наибольших значений величина  $h_{\max}$  достигает при  $q \rightarrow 0$ , которой соответствует ситуация удара оторвавшегося столба жидкости о преграду со скоростью  $V_{2N+2}$ , при этом

$$V_{2N+2} \approx V_c (t_{clp} + T). \quad (4.76)$$

в) Развитие вторичной кавитации

Минимальные значения давлений после схлопывания каверны будут наблюдаться в областях 7 и 8 (см. рис.4.6.), и определяться формулами (4.67) и (4.69), соответственно.

Случай  $N > 1$ .

Из оценки (4.67) следует, что при  $N > 1$  в области 7 в точке  $x_{bc1} = 0$  в момент времени  $t_{bc1}$  будет нарушено условие сплошности потока (4.11), где

$$t_{bc1} = t_{clp} + T = T \cdot \left( N + 1 + \frac{qN}{N+1-q} \right) = T \frac{(N+1)^2 - q}{N+1-q}. \quad (4.77)$$

Полагая, что в точке  $x_{bc1}$  при  $t > t_{bc1}$  образуется каверна, описываемая уравнениями (4.21) – (4.25), получаем решения в области 7:

$$h'_7 = h_{cav}(0), \quad V'_7 = V_0 - (1+2q)V_{cr} = (N-1-q)V_{cr}, \quad (4.78)$$

и области 8:

$$h'_8 = h_{cav}(0) - (h_L - h_{cav}(0)), \quad V'_8 = V_0 - 2qV_{cr} = (N-q) \cdot V_{cr} \quad (4.79)$$

Координаты нижней грани области 8 (точка  $D$  на рис.4.6.,  $a$ ) будут:

$$t_{bc2} = T \cdot \left[ N + \frac{3}{2} + \frac{qN}{2(N+1-q)} \right], \quad x_{bc2} = L \frac{(N+1)(1-q)}{N+1-q} \quad (4.80)$$

Формула (4.78) говорит о том, что всюду в области 7 (треугольник  $CDF$  на рис.4.6.) выполняется условие сплошности потока (4.11), т.е. здесь кавитация может быть локализована в виде одиночной каверны у задвижки, при этом  $V'_7 > 0$ , что говорит о росте каверны.

Нетрудно убедиться, что координаты точки  $F$  (см. рис.4.6.) будут:

$$t_{bc3} = T \cdot (N+2), \quad x_{bc3} = 0. \quad (4.81)$$

Из формулы (4.79) следует, что при выполнении условия

$$h_{cav}(0) - (h_L - h_{cav}(0)) < h_{cav}(x_{bc2}), \quad (4.82)$$

в точке  $D$  с координатами (4.80) будет иметь место нарушение условия сплошности потока (4.11), т.е. возникнет кавитация, как показано на рис.4.6.,  $b$ .

С учетом (4.3) и (4.11), условие (4.82) можно переписать в виде:

$$-z(x_{bc2}) < h_L - h_{cav}(0), \quad (4.83)$$

или, в случае постоянного уклона  $i$

$$h_L - h_{cav}(0) > ix_{bc2} = iL \frac{(N+1)(1-q)}{N+1-q}, \quad (4.84)$$

откуда следует, что для того, чтобы неравенство (4.84) выполнялось при любом  $q$ , достаточно, чтобы

$$h_L - h_{cav}(0) \geq iL. \quad (4.85)$$

или, в более общем виде для условия (4.83):

$$-\min_x z(x) < h_L - h_{cav}(0). \quad (4.86)$$

Рассмотрим случай, когда условие (4.83) не выполняется.

Т.к.  $h_{cav}(x)$  является убывающей функцией  $x$ , а  $h'_8 < h_{cav}(0)$  в силу (4.34), отсюда следует, что существует точка  $x'_{bc2}$  (точка возникновения кавитации), лежащая в интервале

$$0 < x'_{bc2} \leq x_{bc2}, \quad (4.87)$$

для которой нарушаются условие сплошности потока (4.11) в момент времени:

$$t'_{bc2} = t_{bc2} + (x_{bc2} - x'_{bc2})/a < t_{bc3}, \quad (4.88)$$

причем

$$h_{cav}(0) - (h_L - h_{cav}(0)) = h_{cav}(x'_{bc2}). \quad (4.89)$$

В случае постоянного уклона  $i$  координату  $x'_{bc2}$  можно вычислить точнее:

$$x'_{bc2} = \frac{h_L - h_0}{i}. \quad (4.90)$$

Отметим, что для горизонтального трубопровода ( $i = 0$ ) условие (4.85) выполняется всегда в силу (4.34), и случай (4.87) – (4.90) отсутствует.

Допустим, в точке  $x'_{bc2}$  в момент времени  $t'_{bc3}$  также образуется каверна, описываемая уравнениями (4.21) – (4.25).

Тогда имеем в области слева от предполагаемой каверны:

$$h''_7 = h_{cav}(x'_{bc2}), \quad V''_7 = V'_7 + \frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})) = (N-1-q) \cdot V_{cr} + \frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})); \quad (4.91)$$

и в области справа от каверны

$$h''_8 = h_{cav}(x'_{bc2}), \quad V''_8 = -V_0 + (2N+1) \cdot V_{cr} - \frac{g}{a}[h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})] = (N+1-q) \cdot V_{cr} - \frac{g}{a}[h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})]. \quad (4.92)$$

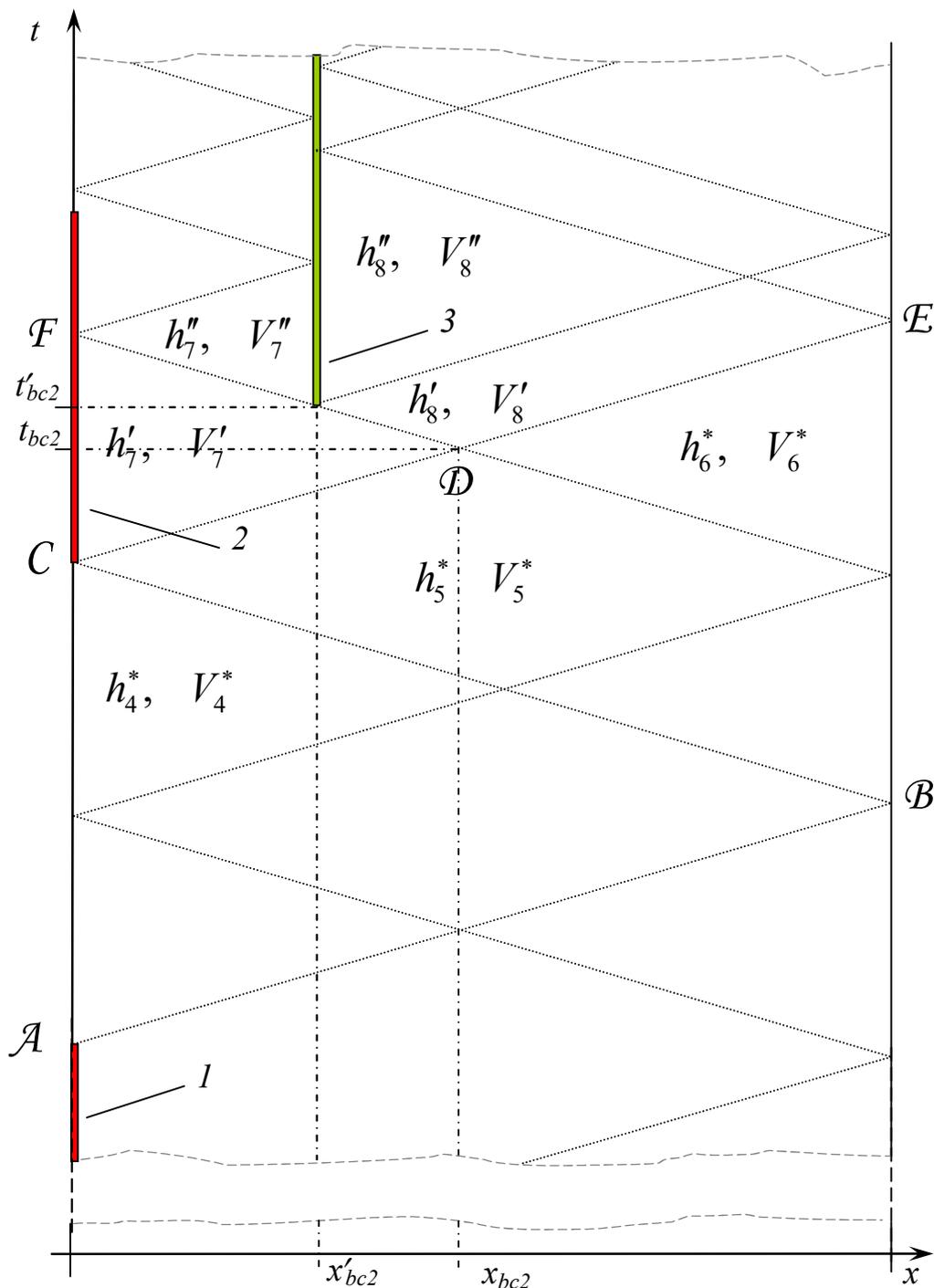


рис.4.10. Возникновение вторичной кавитации при  $N > 1$ .

Здесь: 1 – первичная каверна у задвижки; 2 – вторичная каверна у задвижки;  
3 – предполагаемая каверна в средней части трубы.

Из предпоследней формулы следует, что справа от точки  $x'_{bc2}$  условие сплошности потока (4.11) выполняется.

Так как  $h_{cav}(x)$  – убывающая функция  $x$ , из формулы (4.91) следует, что слева от точки  $x'_{bc2}$  будет  $h_7'' < h_{cav}(x)$ , т.е. условие сплошности потока (4.11) по-

прежнему не выполняется. Это говорит о том, что слева от точки  $x'_{bc2}$  (выше линии  $DF$  на рис.4.10.) возникнет обширная зона мелкопузырьковой кавитации, которая буде пульсировать вместе с волной повышения давления.

Рассмотрим скорость роста каверны

$$V_8'' - V_7'' = 2V_{cr} - 2\frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})). \quad (4.93)$$

При выполнении условия (4.82), из соотношений (4.49) следует, что

$$V_8'' - V_7'' = 2\frac{g}{a}(h_L - 2h_{cav}(0) + h_{cav}(x_{bc2})) > 0, \quad (4.94)$$

т.е. помимо зоны мелкопузырьковой кавитации при  $x < x_{bc2}$ , в точке  $x_{bc2}$  при  $t > t_{bc2}$  возникнет каверна.

При нарушении условия (4.82), в силу равенства (4.89) имеем  $V_8'' - V_7'' = 0$ , что говорит о том, в этом случае каверна в точке  $x'_{bc2}$  вырождается в границу раздела между двухфазным (мелкопузырьковым) и однофазным течением.

Картина течения в фазовой плоскости, полученная в результате расчетов на ЭВМ, представлена на рис.4.11 – рис.4.12.

Случай  $N = 1$

Из оценки (4.67) и того факта, что  $h_{cav}(x)$  является невозрастающей функцией  $x$  при  $i \geq 0$ , следует, что при  $N = 1$  в области 7 условие сплошности (4.11) нарушаться не будет, т.е. здесь, в отличие от случая  $N > 1$ , будет иметь место однофазное течение, и каверна у задвижки образовываться не будет.

Из формулы (4.69) следует, что при выполнении условия

$$h_{cav}(0) - (1 - q)(h_L - h_{cav}(0)) < h_{cav}(x_{bc2}), \quad (4.95)$$

в точке  $D$  с координатами (4.80) будет иметь место нарушение условия сплошности потока (4.11), т.е. возникнет кавитация, как показано на рис.4.6. б.

С учетом (4.4) и (4.11), условие (4.95) можно переписать в виде:

$$-z(x_{bc2}) < (1 - q)(h_L - h_{cav}(0)), \quad (4.96)$$

или, в случае постоянного уклона  $i$ :

$$h_L - h_{cav}(0) > iL \frac{2}{2 - q}, \quad (4.97)$$

откуда следует, что для того, чтобы неравенство (4.96) выполнялось при любом  $q$ , достаточно, чтобы

$$h_L - h_{cav}(0) \geq 2iL \quad (4.98)$$

или, в более общем виде для условия (4.95)

$$-\min_x z(x) < (1-q)(h_L - h_{cav}(0)). \quad (4.99)$$

Рассмотрим случай, когда условия (4.95) нарушается.

Так как  $h_{cav}(x)$  является убывающей функцией  $x$ , аналогично предыдущему случаю можно показать, что существует точка  $x'_{bc2}$  (точка возникновения кавитации), лежащая в интервале (4.87), для которой нарушаются условие сплошности потока (4.11) в момент времени (4.88), причем

$$h_{cav}(0) - (1-q)(h_L - h_{cav}(0)) = h_{cav}(x'_{bc2}). \quad (4.100)$$

В случае постоянного уклона  $i$  координату  $x'_{bc2}$  можно вычислить точнее:

$$x'_{bc2} = (1-q)(h_L - h_{cav}(0))/i. \quad (4.101)$$

Отметим, что для горизонтального трубопровода ( $i = 0$ ) условие (4.95) выполняется всегда в силу (4.34), и случай (4.100) – (4.101) отсутствует.

Допустим, в точке  $x'_{bc2}$  в момент времени  $t'_{bc2}$  также образуется каверна, описываемая уравнениями (4.21) – (4.25).

Тогда имеем в области слева от предполагаемой каверны (см. рис.4.13):

$$h'_7 = h_{cav}(x'_{bc2}), \quad V'_7 = V_0 - V_{cr} + \frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})) = q \cdot V_{cr} + \frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})) = q \cdot V_{cr} - \frac{g}{a}z(x'_{bc2}). \quad (4.102)$$

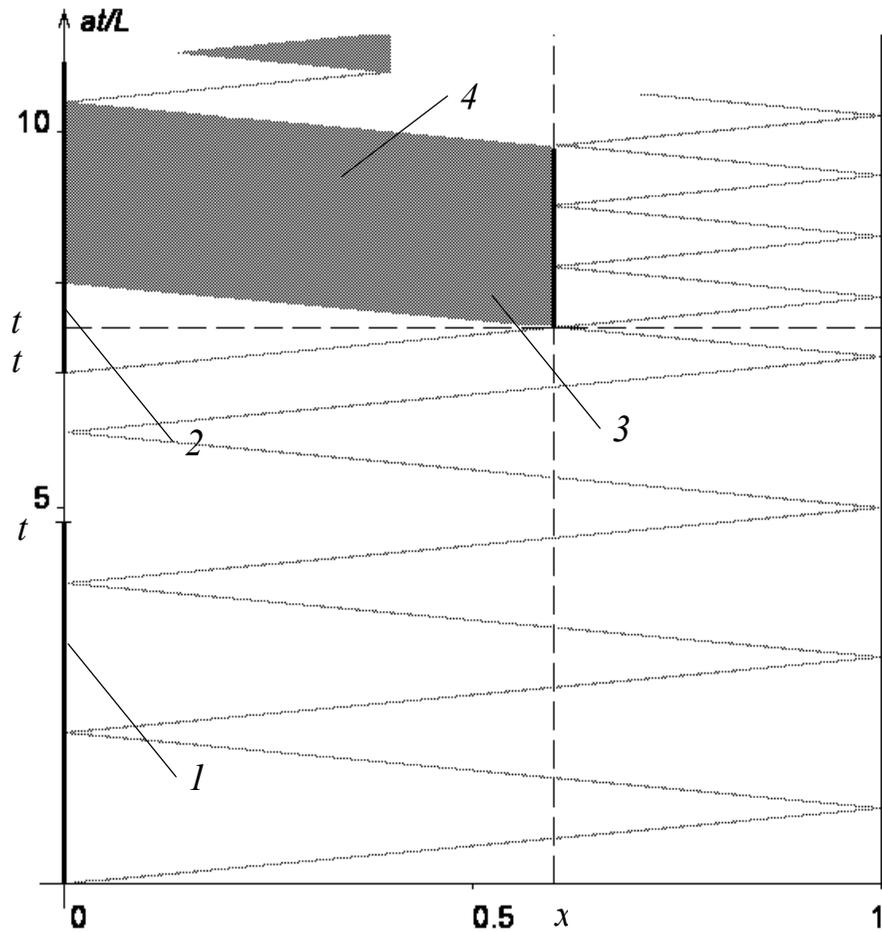


рис.4.11. Вторичная кавитация (случай  $N > 1$ ) при выполнении условия (4.82).

Здесь: 1 – первичная каверна у задвижки; 2 – вторичная каверна у задвижки; 3 – вторичная каверна в средней части трубы; 4 – зона мелкопузырьковой кавитации.

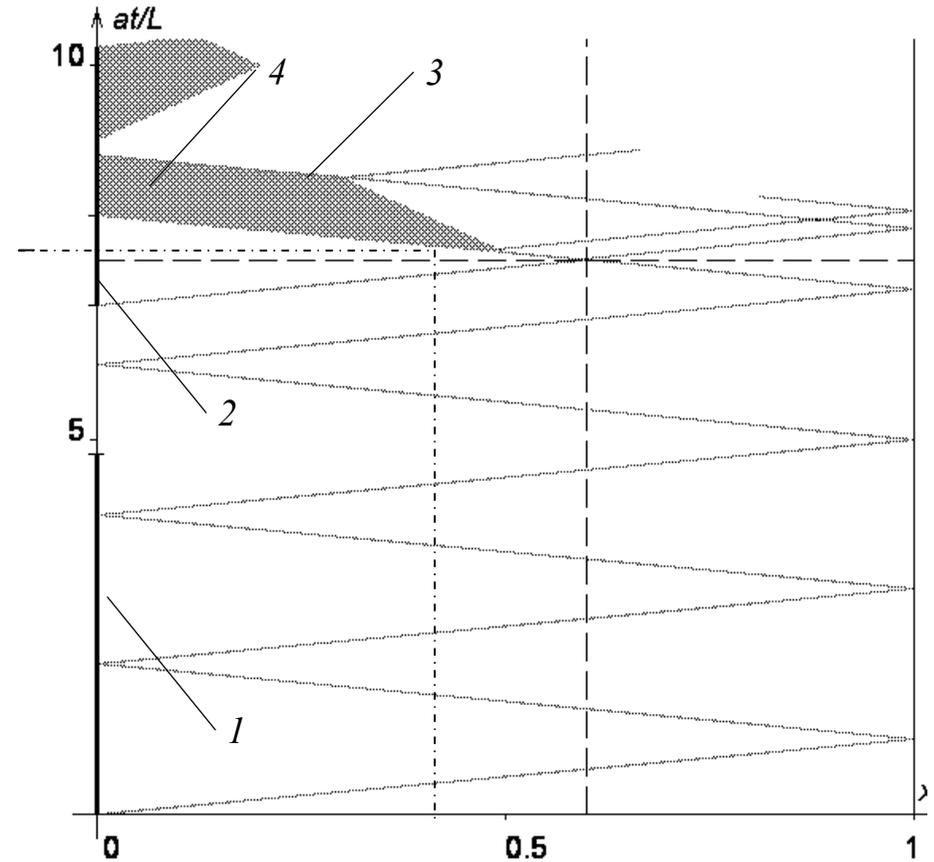


рис.4.12. Вторичная кавитация (случай  $N > 1$ ) при нарушении условия (4.82).

Здесь: 1 – первичная каверна у задвижки; 2 – вторичная каверна у задвижки; 3 – граница раздела фаз; 4 – зона мелкопузырьковой кавитации.

Считая, что у задвижки по-прежнему выполняется условие (4.19), получаем в области, граничащей с задвижкой

$$h_7'' = h_{cav}(0) - 2(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})) - q(h_L - h_{cav}(0)), V_7'' = 0, \quad (4.103)$$

откуда видно, что  $h_7'' < h_{cav}(0)$ , т.е. у задвижки нарушается условие сплошности потока (4.11), что говорит о том, что в момент времени  $t_{bc3}$  (см. (4.81)) у задвижки образуется еще одна каверна.

Полагая, что у задвижки образуется каверна, описываемая уравнениями (4.21) – (4.25), используя граничные условия (4.25), получаем

$$h_7'' = h_{cav}(0), V_7'' = V_7' + \frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})) = q \cdot V_{cr} + 2\frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})) = q \cdot V_{cr} - 2\frac{g}{a}z(x'_{bc2}); \quad (4.104)$$

В силу выбора  $z(x)$  очевидно, что  $V_7' > 0, V_7'' > 0$ ; последнее неравенство говорит о том, что каверна у задвижки будет расти.

В области справа от каверны имеем

$$h_8' = h_{cav}(x'_{bc2}), V_8' = V_0 + (1-2q) \cdot V_{cr} - \frac{g}{a}[h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})] = (2-q) \cdot V_{cr} - \frac{g}{a}[h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})]. \quad (4.105)$$

Из (4.105) и (4.100), с учетом (4.49), следует

$$V_8' = (2-q) \cdot V_{cr} - \frac{g}{a}[h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})] \geq V_{cr} > 0. \quad (4.106)$$

Из формул (4.105) следует, что справа от точки  $x'_{bc2}$  условие сплошности потока (4.11) выполняется.

Так как  $h_{cav}(x)$  – убывающая функция  $x$ , из формулы (4.102) следует, что слева от точки  $x'_{bc2}$  будет  $h_7' < h_{cav}(x)$ , т.е. условие сплошности потока (4.11) по-прежнему не выполняется. Это говорит о том, что слева от точки  $x'_{bc2}$  (выше линии  $DF$  на рис.4.13) возникнет обширная зона мелкопузырьковой кавитации, которая будет пульсировать вместе с волной повышения давления (как показано на рис.4.13).

Оценим скорость роста внутренней каверны  $V_8' - V_7'$ . При выполнении условия (4.95), с учетом соотношения (4.49) следует, что

$$V_8' - V_7' = 2(1-q)V_{cr} - 2\frac{g}{a}(h_{cav}(0) - h_{cav}(x'_{bc2})) > 0, \quad (4.107)$$

т.е. помимо зоны мелкопузырьковой кавитации при  $x < x_{bc2}$ , в точке  $x_{bc2}$  при  $t > t_{bc2}$  возникнет каверна.

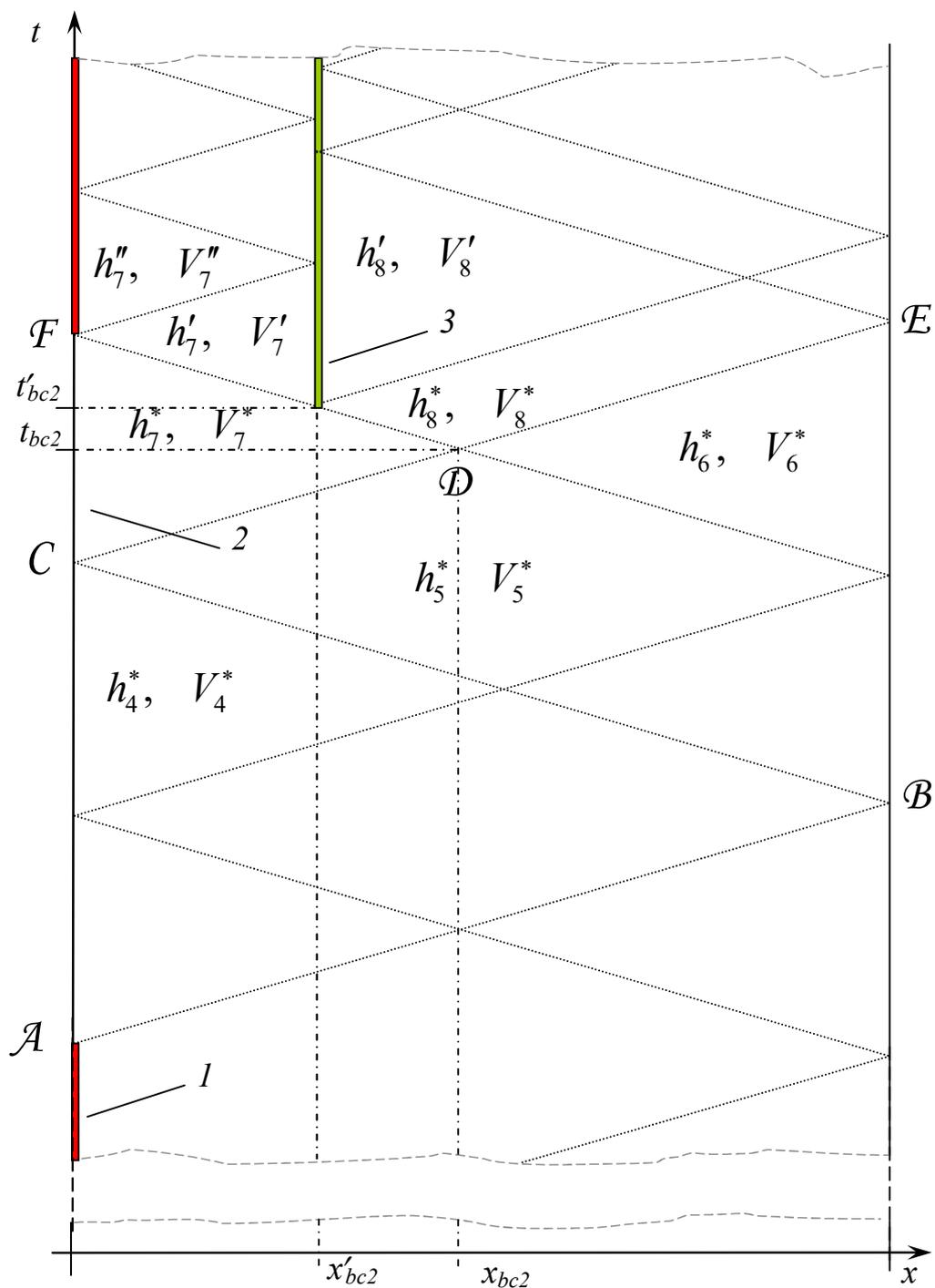


рис.4.13. Возникновение вторичной кавитации при  $N=1$ .

Здесь: 1 – первичная каверна у задвижки; 2 – вторичная каверна у задвижки;  
3 – предполагаемая каверна в средней части трубы.

При нарушении условия (4.95), в силу равенства (4.100) имеем  $V'_8 - V'_7 = 0$ , что говорит о том, в этом случае каверна в точке  $x'_{bc2}$  вырождается в границу раздела между двухфазным (мелкопузырьковым) и однофазным течением.

Картина течения в фазовой плоскости, полученная в результате расчетов на ЭВМ, представлена на рис.4. 14 –рис.4. 15.

Таким образом, только для строго горизонтального трубопровода ( $i = 0$ ) возможно описать процесс разрыва сплошности при гидравлическом ударе при помощи модели изолированных каверн вида (4.21) – (4.25). Любое наличие даже незначительного уклона, как положительного, так и отрицательного, неизбежно приводит к возникновению обширных зон протяжённой (мелкопузырьковой) кавитации, пульсирующих вместе с волной понижения давления.

Так как ситуация  $i = 0$  соответствует всего одной точке в диапазоне значений уклона  $i$ , это говорит о том, что случай появления кавитации только в форме больших изолированных каверн относится к гидравлически неустойчивым ситуациям.

Итак, рассчитаны параметры течения, образующегося после схлопывания первой каверны. Впервые исследованы формы вторичной кавитации, установлены условия, время возникновения и местоположения вторичных каверн, и зон мелкопузырьковой кавитации, причем помимо появления каверны на границе потока (в точке  $x = 0$ ), образуется еще каверна в средней части потока, что было неотчетливо зафиксировано в эксперименте [173]; этот факт отмечался ещё и в работе [104].

Дальнейшее рассмотрение вопроса аналитическим путем затруднительно, т.к. полосы постоянства инвариантов Римана становятся все более узкими и картина начитает дробиться на все более мелкие «осколки» с постоянными значениями параметров течения.

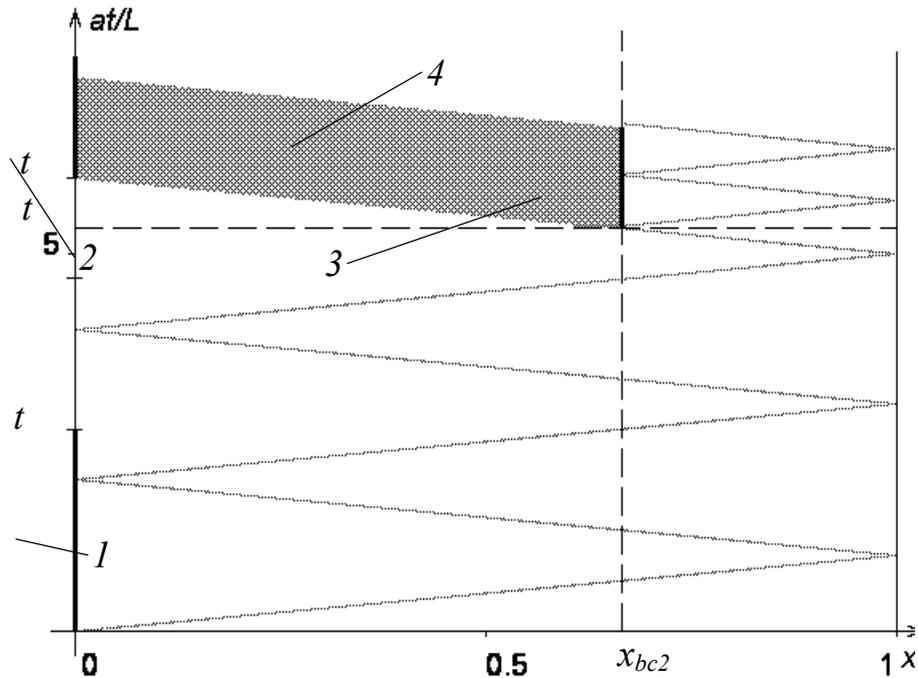


рис.4. 14. Вторичная кавитация (случай  $N = 1$ ) при выполнении условия (4.95).

Здесь: 1 – первичная каверна у задвижки; 2 – вторичная каверна у задвижки; 3 – вторичная каверна в средней части трубы; 4 – зона мелкопузырьковой кавитации.

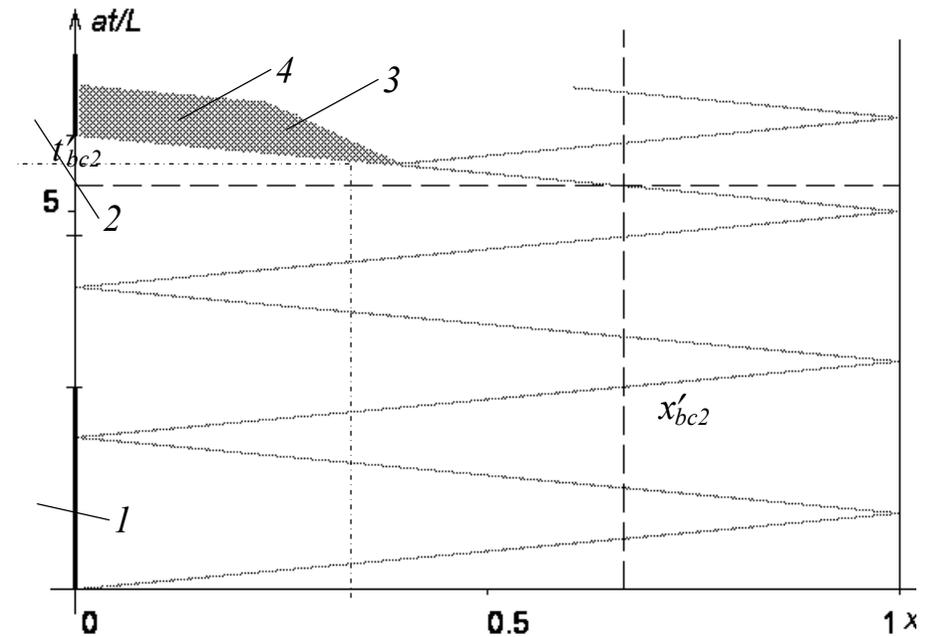


рис.4. 15. Вторичная кавитация (случай  $N = 1$ ) при нарушении условия (4.95).

Здесь: 1 – первичная каверна у задвижки; 2 – вторичная каверна у задвижки; 3 – граница раздела фаз; 4 – зона мелкопузырьковой кавитации.

Результаты аналитических выкладок демонстрируют, что

а) в случае отсутствия кавитации ( $K \leq 1$ ) процесс носит ярко выраженный периодический характер достаточно простой формы (линия 2 на рис.4.8 – рис.4.9); б) при появлении кавитации ( $K > 1$ ) резко меняется характер процесса, который носит все более усложняющийся хаотический, аperiodический характер (линия 1 на рис.4.8 – рис.4.9).

Сопоставление с экспериментами показало, что данные результаты хорошо описывают качественную, принципиальную картину течения и даже способны предсказать некоторые явления (например, появление и местоположение внутренних каверн в течении). Однако в отношении количественных характеристик эта модель дает сильно завышенные, несглаженные оценки, как это видно из рис.4.16.

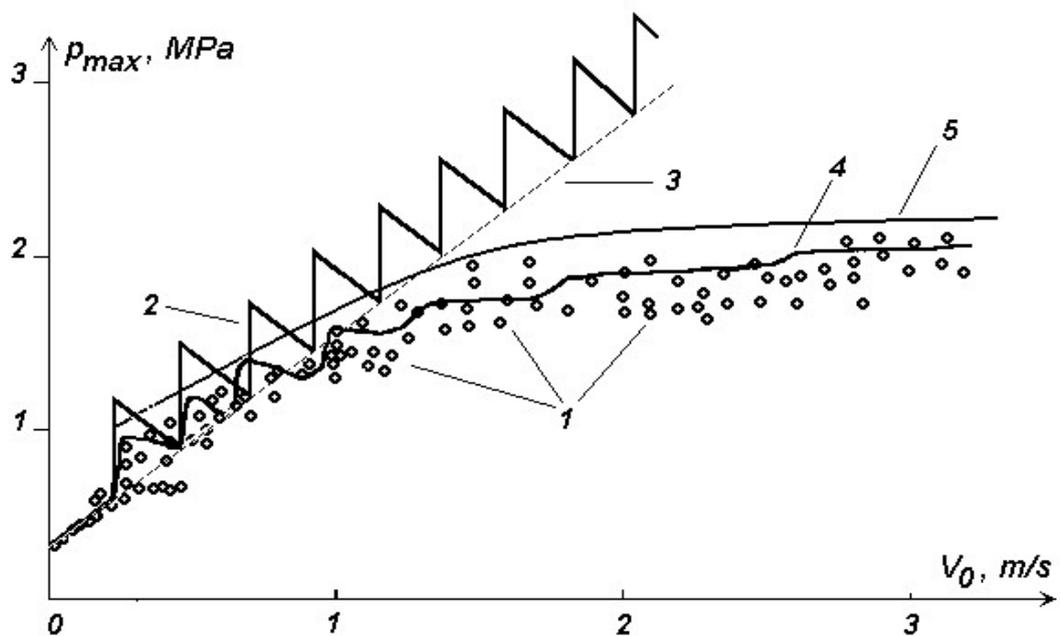


рис.4.16. Зависимость  $p_{max}$  от  $V_0$ :

- 1 – экспериментальные данные [145]; 2 – по формуле (4.73); 3 – по формуле Н.Е.Жуковского; 4 – расчет на ЭВМ с учетом трения ( $\lambda \neq 0$ ); 5 – по формуле (4.147) .

#### 4.2.4 Реальная жидкость ( $\lambda \neq 0$ )

##### 4.2.4.1 Решение без учета разрыва сплошности потока

Рассмотрим начальную стадию процесса. Очевидно, что возмущение будет распространяться вдоль характеристики  $x = at$ . Т.к. инвариант  $s$  приходит из области невозмущенного течения, его значение можно определить по второй формуле (4.20). Тогда из первого уравнения (4.20) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для  $r$  за фронтом волны возмущения. Переходя к переменным  $h$  и  $V$  в соответствии с (4.17), получаем уравнения для напора и скорости за фронтом волны возмущения:

$$\frac{dh^*}{dt} = -\frac{a}{g} B^* V^* - a \frac{\lambda V_0^2}{4gd} = -\frac{a}{g} \left( B^* V^* + \frac{\lambda V_0^2}{4d} \right), \quad \frac{dV^*}{dt} = -B^* V^* + \frac{\lambda V_0^2}{4d}, \quad (4.108)$$

где  $h^*(t) = h(at, t)$  и  $V^*(t) = V(at, t)$  – напор и скорость за фронтом волны возмущения, соответственно.

Из (4.108) с учетом (4.9) и (4.20) получаем

$$h^*(t) = h_L + \frac{\lambda}{2gd} V_0^2 (L - at) - \frac{a}{g} (V_0 - V^*(t)) \quad \text{при } 0 \leq t \leq L/a \quad (4.109)$$

Из (4.109) и (4.11), с учетом (4.49) и (4.51), следует, что при выполнении условия

$$K_1 < K < K_2 \quad (4.110)$$

где

$$K_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}, \quad K_2 = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}, \quad (4.111)$$

в начале трубопровода ( $x=0$ ) имеет место нарушение сплошности потока (см. рис.4.17) при  $t>0$ .

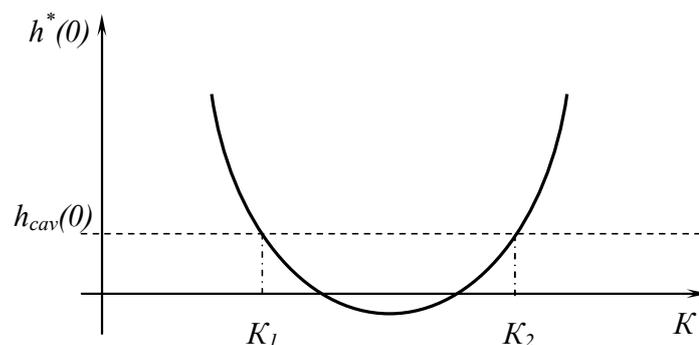


рис.4.17.

Здесь

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{g \cdot (h_L - h_{cav}(0))}{a^2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{V_{cr}}{a}} \quad (4.112)$$

Неравенство (4.110) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в (4.48).

Неравенство (4.110) имеет смысл при

$$\varepsilon \leq 1/2. \quad (4.113)$$

Заметим, что величина  $\varepsilon$  обычно невелика; так, для опытов [145]  $\varepsilon \approx 0,14$ ; для магистрального трубопровода  $\varepsilon \approx 0,17$ . Можно считать, что для реальных задач

$$\varepsilon \leq 0,2. \quad (4.114)$$

Тогда  $K_1 \approx 1,04$ ,  $K_2 \approx 24$ , т.е. левая половина неравенства (4.110) мало отличается от (4.48). Что касается границы сверху  $K_2$ , то этот случай соответствует движению с большими скоростями, когда исходная модель уже нуждается в уточнении. Например, опыты [145] проводились при  $K \leq K_{\max} \approx 14$ , т.е. при значениях  $K$ , значительно меньших  $K_2$ .

#### 4.2.4.2. Решение при наличии каверны

Рассмотрим случай (4.110), соответствующий возникновению кавитации в начале трубопровода.

Попробуем локализовать кавитацию, как и в предыдущем случае, поместив в начале трубопровода одиночную каверну, описываемую условиями (4.21) – (4.25).

Из граничного условия (4.25) и соотношений (4.13), с учетом (4.49) и (4.51), получаем скорость правой границы каверны в начальный момент времени:

$$V^*(0) = V_R(0) = V_0^* = V_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{K} - \varepsilon^2 K\right). \quad (4.115)$$

Из (4.115) и справедливости неравенства (4.110) следует, что

$$0 < V^*(0) < V_0, \quad (4.116)$$

а из второго уравнения (4.108), определения функции  $B$  (4.16) и того факта, что функция потерь  $B \cdot |V|$  является возрастающей функцией  $|V|$ , следует, что справедливо

$$0 < V^*(t) \leq V_0, \quad (4.117)$$

более того,

$$V^*(0) < V^*(t) \leq V_0, \quad (4.118)$$

при этом  $V(t)$  будет возрастающей функцией  $t$ .

Из второго уравнения (4.108) имеем

$$V^*(t) - V^*(0) = \frac{\lambda V_0^2}{4d} t - \int_0^t B^* V^* dt, \quad (4.119)$$

откуда, с учетом (4.118), (4.115) и (4.16) получается оценка

$$0 < V^*(t) - V^*(0) < \left( \frac{\lambda V_0^2}{4d} - \frac{\lambda_0^*(V_0^*)^2}{4d} \right) t < \frac{\lambda V_0^2}{4d} t, \quad (4.120)$$

где  $\lambda_0^* = \lambda(V_0^*)$ .

Из первого уравнения (4.108) получаем

$$h^*(t) = h^*(0) - \frac{\lambda V_0^2}{4gd} at - \frac{a}{g} \int_0^t B^* V^* dt, \quad (4.121)$$

Аналогично предыдущему случаю, справедливы оценки

$$-\frac{\lambda V_0^2}{2gd} at < h^*(t) - h^*(0) < -\left( \frac{\lambda V_0^2}{4gd} + \frac{\lambda_0^*(V_0^*)^2}{4gd} \right) at < -\frac{\lambda V_0^2}{4gd} at, \quad (4.122)$$

Т.к.  $h^*(0) = h_{cav}(0)$ , из (4.121) с учетом (4.12) следует, что при выполнении условия

$$-\frac{\lambda V_0^2}{4gd} x - \frac{1}{g} \int_0^x B^* V^* dx < z(x) \text{ при } 0 < x < L, \quad (4.123)$$

или, с учетом (4.3),

$$\frac{\lambda V_0^2}{4gd} + \frac{1}{g} B^* V^* > i, \quad (4.124)$$

справа от предполагаемой каверны по-прежнему не будет выполняться условие сплошности потока (4.11).

Аналогично можно убедиться, что при выполнении ограничения на уклон (4.123) или (4.124), добавление любого конечного числа каверн не приводит к выполнению неравенства (4.11).

Учитывая (4.117), легко получить достаточные условия, при которых справа от рассматриваемой каверны будет иметь место нарушение сплошности потока:

$$-\frac{\lambda V_0^2}{4gd} x \leq z(x) \quad \text{или} \quad \frac{\lambda V_0^2}{4gd} \geq i. \quad (4.125)$$

Численные эксперименты подтверждают этот вывод. На рис.4.18 показана картина в фазовой плоскости при выполнении условия (4.125), полученная на основании численных расчетов.

С другой стороны, требование, противоположное (4.123) – (4.124):

$$-\frac{\lambda V_0^2}{4gd} x - \frac{1}{g} \int_0^x B^* V^* dx \geq z(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < L, \quad (4.126)$$

или

$$\frac{\lambda V_0^2}{4gd} + \frac{1}{g} B^* V^* \leq i, \quad (4.127)$$

гарантирует, что на начальной стадии процесса нарушения сплошности справа от каверны не будет, т.е. кавитацию достаточно локализовать в виде в виде одной изолированной каверны. Однако это не говорит о том, что протяжённой (мелкопузырьковой) кавитации не разовьется при дальнейшей эволюции течения. Как показывает случай идеальной жидкости и численные эксперименты для реальной жидкости, мелкопузырьковая кавитация появляется на последующих стадиях процесса.

Достаточными условиями, гарантирующими выполнение (4.126) – (4.127), будут неравенства

$$-\frac{\lambda V_0^2}{2gd} x \geq z(x) \quad \text{или} \quad \frac{\lambda V_0^2}{2gd} \leq i. \quad (4.128)$$

На рис.4.19 показана картина в фазовой плоскости при выполнении условия (4.128), полученная на основании численных расчетов.

Итак, в случае ( $\lambda \neq 0$ ), т.е. при учете вязких свойств жидкости, при выполнении ограничения на уклон (4.123) – (4.124) уже на начальной стадии процесса невозможно локализовать кавитацию в виде отдельных изолированных полостей, т.е. помимо возникновения крупных каверн неизбежно появление мелкопузырькового шлейфа.

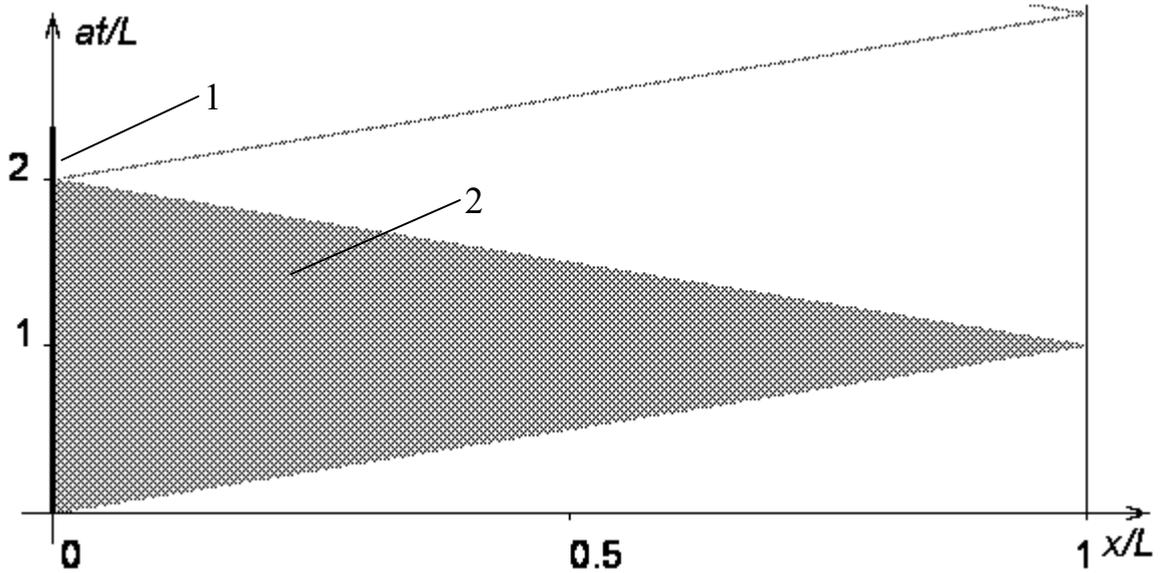


рис.4.18. Картина в фазовой плоскости при выполнении условия (4.125).  
1 – каверна у задвижки; 2 – область мелкопузырьковой кавитации.

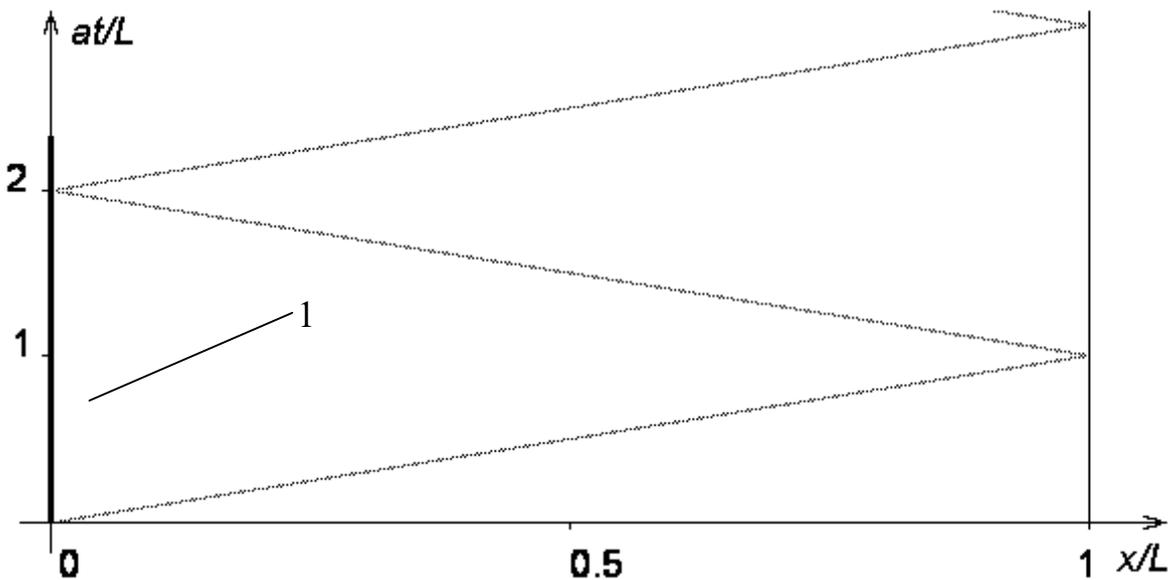


рис.4.19. Картина в фазовой плоскости при выполнении условия (4.128).  
Здесь 1 – каверна у задвижки.

Отметим, что этот вывод безусловно верен для горизонтального трубопровода, для которого условие (4.123) – (4.124) выполняется всегда. Это

было установлено в работах автора [151], где рассматривался случай горизонтального трубопровода.

Таким образом, неравенство (4.123) – (4.124) является обобщением этого случая на негоризонтальные трубопроводы.

Неравенство (4.110) является критерием возникновения кавитации (в виде мелкопузырькового шлейфа) непосредственно за фронтом волны возмущения в период  $0 < t < L/a$ , и является более строгим требованием чем (4.48). Однако если рассматривать (4.48) как критерий возникновения кавитации вообще, т.е. не обязательно в первой фазе сразу за фронтом волны разрежения, но и в последующие моменты, то, как показывают численные эксперименты, критерий (4.48) можно рассматривать как критерий возникновения кавитации и в этом случае.

Интересно отметить, что в отношении  $h_{max}$  теория идеальной жидкости (случай  $\lambda \neq 0$ ) дает хорошее совпадение с экспериментом (см. рис.4.16) до тех пор, пока не возникает явление кавитации. Как показывают и расчеты, и эксперименты [145], в этом случае наблюдается значительное снижение интенсивности и высокочастотное затухание колебаний по времени. Такое внезапное усиление фактора вязкости в случае течения с разрывом сплошности потока объясняется тем, что наличие вязкости приводит к возникновению упомянутого выше мелкопузырькового шлейфа, в котором и происходит интенсивное затухание колебаний.

#### 4.2.4.3. Приближенное решение

Рассмотрим динамику оторвавшегося столба жидкости. На левой оконечности этого столба жидкости расположена каверна, описываемая условиями (4.21) – (4.25). Как показано выше, в оторвавшемся столбе жидкости возникает обширная зона мелкопузырьковой кавитации, которая пульсирует в соответствии с прохождением волн сжатия давления. Ввиду значительного рассеивания энергии в пузырьках, волновой процесс затухает достаточно быстро в рассматриваемом столбе жидкости. Поэтому без значительной

погрешности для оценки средней скорости движения столба жидкости можно рассматривать движение этого столба жидкости как движение «замороженной» жидкости (твердого стержня). Уравнения движения такого стержня будут

$$\rho\omega L \frac{dV_{st}}{dt} = -(p_0 - p_{sv})\omega - \tau\chi L, \quad (4.129)$$

где  $V_{st}$  – средняя скорость движения оторвавшегося столба жидкости;  $\omega$  – площадь поперечного сечения;  $\tau \approx \lambda\rho|V_{st}|V_{st}/8$  – напряжения трения жидкости о стенки;  $\chi$  – смоченный периметр.

Более подробно.

Если проинтегрировать второе уравнение из (4.7) по  $x$  от  $x_R(t)$  до  $L$ , имеем

$$\int_{x_R(t)}^L \frac{\partial V}{\partial t} dx + g(h_L - h_{cav}(x_R)) = - \int_{x_R(t)}^L \frac{\lambda|V|V}{2d} dx. \quad (4.130)$$

По правилу дифференцирования интеграла с подвижным пределом с учетом (4.21) имеем

$$\int_{x_R(t)}^L \frac{\partial V}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_R(t)}^L V dx + V(x_R, t) \cdot V_R. \quad (4.131)$$

Введем обозначения

$$\tilde{L}(t) = L - x_R(t), \quad V_c(t) = \frac{1}{\tilde{L}} \int_{x_R(t)}^L V dx. \quad (4.132)$$

где  $V_c$  – средняя скорость движения оторвавшегося столба жидкости.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_R(t)}^L V dx = \frac{\partial}{\partial t} (V_c \cdot \tilde{L}) = \tilde{L} \frac{dV_c}{dt} - V_c \cdot V_R. \quad (4.133)$$

Пренебрегая размером каверны ( $x_R \approx 0$ ) по сравнению с  $L$  и пренебрегая разностью скоростных напоров (или, по другому, полагая  $V(x_R, t) \approx V_c$ ):

$$\int_{x_R(t)}^L \frac{\partial V}{\partial t} dx = \tilde{L} \frac{dV_c}{dt} + V_R \cdot \underbrace{(V(x_R, t) - V_c)}_{\approx 0} \approx \tilde{L} \frac{dV_c}{dt} \approx L \frac{dV_c}{dt}. \quad (4.134)$$

Тогда получаем из (4.130) уравнение

$$L \frac{dV_c}{dt} + g(h_L - h_{cav}(x_R)) = - \int_{x_R(t)}^L \frac{\lambda|V|V}{2d} dx, \quad (4.135)$$

или, полагая

$$\int_{x_R(t)}^L \frac{\lambda|V|V}{2d} dx \approx L \frac{\lambda_c|V_c|V_c}{2d}, \quad (4.136)$$

имеем окончательно, с учетом вышеупомянутых упрощений, приближенное уравнение для описания движения оторвавшегося столба жидкости:

$$L \frac{dV_c}{dt} = -g(h_L - h_{cav}(0)) - L \frac{\lambda_c|V_c|V_c}{2d}. \quad (4.137)$$

Для случая  $\lambda_c = const$  (развитый турбулентный поток) уравнение (4.129) имеет решение

$$V_c(t) = \begin{cases} \frac{V_{cr}}{\varepsilon} \operatorname{tg} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t_0 - t) \right] & , \text{ при } 0 < t \leq t_0; \\ -\frac{V_{cr}}{\varepsilon} \operatorname{th} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t - t_0) \right] = \frac{V_{cr}}{\varepsilon} \operatorname{th} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t_0 - t) \right] & , \text{ при } t_0 \leq t < t_{clp}; \end{cases} \quad (4.138)$$

где  $\varepsilon$  определено в (4.112), а  $t_0$  – момент времени, когда скорость меняет знак:

$$t_0 = \frac{T}{2\varepsilon} \operatorname{arctg} \left( \frac{\varepsilon V_0}{V_{cr}} \right). \quad (4.139)$$

Подставляя положительную скорость из (4.138) в (4.22), находим с учетом (4.139) максимальный размер (длину) каверны:

$$l_{\max} = \frac{V_{cr}}{\varepsilon} \int_0^{t_0} \operatorname{tg} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t_0 - t) \right] dt = -\frac{V_{cr}T}{2\varepsilon^2} \ln \left| \cos \left( \frac{2\varepsilon t_0}{T} \right) \right| = \frac{V_{cr}T}{4\varepsilon^2} \ln(1 + \varepsilon^2 K^2). \quad (4.140)$$

Из очевидного равенства для отрицательной скорости из (4.138)

$$l_{\max} = \frac{V_{cr}}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_{clp}} \operatorname{th} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t - t_0) \right] dt = \frac{V_{cr}T}{2\varepsilon^2} \ln \left| \operatorname{ch} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t_{clp} - t_0) \right] \right| \quad (4.141)$$

определяем момент схлопывания каверны  $t_{clp}$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon^2 K^2) = \ln \left( \operatorname{ch} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t_{clp} - t_0) \right] \right) \quad (4.142)$$

или

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 K^2} = \operatorname{ch} \left[ \frac{2\varepsilon}{T} (t_{clp} - t_0) \right] \quad (4.143)$$

откуда

$$t_{clp} = t_0 + \frac{T}{2\varepsilon} \operatorname{arcch} \left( \sqrt{1 + (\varepsilon K)^2} \right). \quad (4.144)$$

Из уравнения (4.23) получаем, после подстановки (4.138) в качестве  $V_R$  в (4.22):

$$t_{clp} = \frac{T}{2\varepsilon} \operatorname{arctg}(\varepsilon K) + \frac{T}{2\varepsilon} \operatorname{arcth} \left( \frac{\varepsilon K}{\sqrt{1 + (\varepsilon K)^2}} \right). \quad (4.145)$$

Заметим, что формула (4.145) переходит в огибающую величины (4.56) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Как показывают результаты аналитического решения (см. выше) для идеальной жидкости, максимальный напор  $h_{max}$  (см. (4.73)) порождается частью столба жидкости, продолжающегося двигаться по инерции (так, как будто каверна еще существует) и гасит свою кинетическую энергию к моменту времени  $t_{clp} + T$  (см. (4.76)). Поэтому, с некоторым запасом, возможно оценить максимальное давление по формуле Н.Е. Жуковского для скорости столба жидкости в момент времени  $t_{clp} + T$ :

$$h_{max} \approx h_L - \frac{a}{g} V_c(t_{clp} + T). \quad (4.146)$$

Отсюда можно получить, используя (4.138), (4.139) и (4.145):

$$h_{max} = h_L + \frac{a}{g} V_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon K)^2}} + \frac{th(2\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{h_L - h_{cav}(0)}{1 + (\varepsilon K)^2 + \varepsilon K \cdot th(2\varepsilon) \cdot \sqrt{1 + (\varepsilon K)^2}}. \quad (4.147)$$

Интересно заметить, что формула (4.147) превращается в огибающую (4.73) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Результаты вычисления по формуле (4.147) в сравнении с экспериментальными данными представлены на рис.4.16, кривая 5.

## ГЛАВА 5. РАСЧЕТЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ СХЕМ БЕГУЩЕГО СЧЕТА

### 5.1. Разностные уравнения

#### 5.1.1. Разностная сетка

Пусть длина  $i$ -того трубопровода  $L_i$  разбита на  $M_i$  равных интервалов. Для расчетов используется прямоугольная разностная сетка с шагом по оси  $x$ , равным  $\Delta x_i = L_i/M_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) и шагом  $\tau$  по оси времени.

Будем обозначать через  $r_n^k = r(n\Delta x, t_k)$ ,  $s_n^k = s(n\Delta x, t_k)$  и т.д. значения величин  $r = r(x, t)$ ,  $s = s(x, t)$  и т.д. в точке разностной сетки с координатами  $(n, k)$ , где  $n$  - номер расчетной точки по оси  $x$  ( $n = 0, \dots, M_i$ );  $k$  - номер шага по времени. Здесь  $t_k$  - момент времени, соответствующий  $k$ -тому шагу по времени (если шаг по времени постоянен, то  $t_k = k \times \tau$ ).

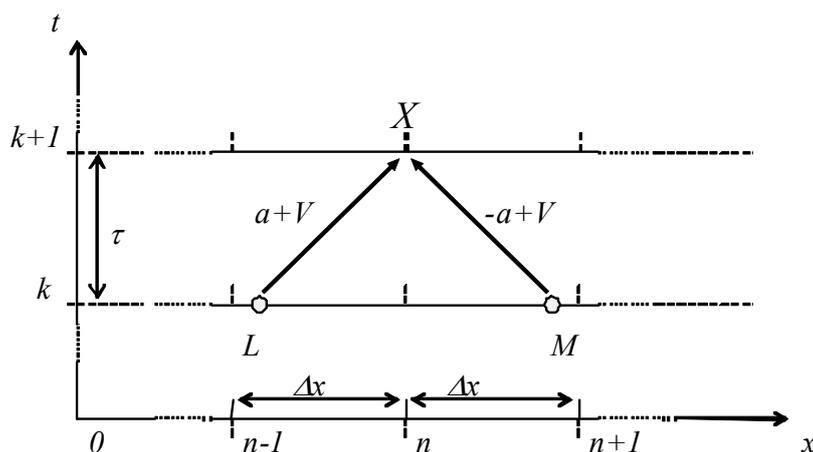


рис.5.1

Пусть  $X = (n \cdot \Delta x, t_{k+1})$  - расчетная точка, а  $L$  и  $M$  обозначают точки на предыдущем ( $k$ -том) слое по времени, откуда выходят соответствующие характеристики, приходящие в точку  $X$ . Очевидно, что

$$L = X - \int_{t_k}^{t_{k+1}} (a + V) dt, \quad M = X - \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-a + V) dt \quad (5.1)$$

где  $t_{k+1}$  - момент времени, соответствующий  $k+1$ -му шагу по времени (если шаг по времени постоянен, то  $t_{k+1} = (k+1) \times \tau$ ).

#### 5.1.2. Метод характеристик

Если скорость  $V$  значительна (по сравнению с  $a$ , см. (2.40)), отрезки характеристик  $LX$  и  $MX$  будут криволинейными, если же, наоборот, конвективными слагаемыми пренебрегается, то  $LX$  и  $MX$  будут просто прямыми.

Метод характеристик [137] соответствует случаю, когда шаги по времени и по пространству подобраны так, что  $L$  и  $M$  совпадают с ближайшими расчетными точками:  $L = [(n-1) \cdot \Delta x, t_k]$ ,  $M = [(n+1) \cdot \Delta x, t_k]$ . При этом, строго говоря, сетка может быть и нерегулярной (ячейки сетки будут криволинейными четырёхугольниками).

Метод характеристик исторически стал первым численным методом, применяемым для расчета гидравлического удара, и до сих пор остаётся одним из самых популярных [25]. Этот метод, несомненно, обеспечивает очень хорошую точность для расчетов гидравлического удара в одиночном трубопроводе, но применение его для систем трубопроводов наталкивается на некоторые трудности.

Считая, что конвективные члены при расчетах не учитываются, в силу построения расчетной сетки, для всех труб системы должны соблюдаться соотношения (т.н. условия Куранта)

$$\Delta x_i = a_i \cdot \tau, \text{ или } \frac{a_i \cdot \tau}{\Delta x_i} = 1, \text{ где } i = 1, \dots, N. \quad (5.2)$$

Пусть  $i$  и  $l$  – номера различных труб, входящих в трубопроводную систему. Тогда из вышеприведённого ограничения, приравнивая одинаковые значения  $\tau$ , получаем, что любых двух различных труб в системе должно выполняться соотношение

$$\frac{\Delta x_i}{a_i} = \frac{\Delta x_l}{a_l}, \text{ или } \frac{L_i}{a_i M_i} = \frac{L_l}{a_l M_l}, \text{ или } \frac{L_i/a_i}{L_l/a_l} = \frac{M_i}{M_l}. \quad (5.3)$$

Так как  $M_i$  и  $M_l$  является целыми величинами, отсюда следует, что времена пробега волн по любым двум трубам в системе должны быть кратными, что весьма маловероятно. Для соблюдения этого требования приходится

корректировать либо длины трубопроводов, либо скорости волн гидравлического удара. И то, и иное вносит искажения в результаты расчета; возникающие при этом погрешности при неблагоприятных условиях могут достигать значительных величин (например, в работе [194] описана ситуация, когда погрешность составляет около 30%).

### 5.1.3. Схемы бегущего счета

От вышеприведенного недостатка свободны схемы бегущего счета [137], являясь дальнейшим развитием метода характеристик.

Схемы бегущего счета используют запись системы уравнений в инвариантах Римана (2.53) – (2.55).

Аппроксимируем уравнения (2.53) – (2.54) с первым порядком точности по явной разностной схеме бегущего счета (индекс  $i$  для простоты опущен):

$$\begin{aligned} \frac{r_n^{k+1} - r_n^k}{\tau} + a \frac{r_n^k - r_{n-1}^k}{\Delta x} &= -B_n^k \cdot (r_n^{k+1} + r_n^k), \\ \frac{s_n^{k+1} - s_n^k}{\tau} - a \frac{s_{n+1}^k - s_n^k}{\Delta x} &= -B_n^k \cdot (r_n^k + s_n^{k+1}), \end{aligned} \quad (5.4)$$

получаем следующие расчетные зависимости

$$\begin{aligned} r_n^{k+1} &= \frac{(1 - \mu)r_n^k + \mu r_{n-1}^k - \tau B_n^k s_n^k}{1 + \tau B_n^k}, \text{ при } n = 1, \dots, N_i; \\ s_n^{k+1} &= \frac{(1 - \mu)s_n^k + \mu s_{n+1}^k - \tau B_n^k r_n^k}{1 + \tau B_n^k}, \text{ при } n = N_i - 1, \dots, 0; \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $\mu_i = c_i \tau / \Delta x_i$  коэффициент Куранта.

Соотношения (5.5) позволяют легко рассчитывать значения неизвестных  $r_n^{k+1}$  и  $s_n^{k+1}$  на новом  $k+1$ -ом шаге по времени по известным значениям  $r_n^k$  и  $s_n^k$  на предыдущем  $k$ -том шаге, за исключением граничных значений выходящих инвариантов  $r_0^{k+1}$  и  $s_N^{k+1}$ .

Для нахождения этих граничных значений используются уравнения граничных условий (см. выше), которые для этой цели также записываются в инвариантах (2.51) при помощи (2.52) и при необходимости линеаризуются.

Пусть  $m^j$  – число труб: примыкающих к  $j$ -тому узлу, а  $l^j$  – число собственных параметров узла (т.е. параметров, характеризующих состояние узла, например, число оборотов для насоса, объем воздуха в компенсаторе, ход клапана и т.д.). Тогда для нахождения граничных значений выходящих инвариантов необходимо будет решать систему уравнений размерностью  $m^j + l^j$  для каждого узла  $j$ .

Явная схема (5.5) устойчива при соблюдении условия Куранта:

$$\mu_i = \frac{a_i \tau}{h_i} \leq 1. \quad (5.6)$$

Эта схема хорошо отслеживает фронты гидравлического удара и другие резкие градиенты течения, обеспечивая хорошую точность результатов, алгоритмически достаточно проста и легка в программной реализации, т.к. граничные условия решаются для каждого узла отдельно. В отличие от ограничения (5.2) вместо строгого равенства в (5.6) используется неравенство, что делает условие (5.6) более «гибким», т.к. отпадает необходимость в корректировке длин труб или скоростей волн.

Недостатком явной схемы (5.5) является ограничение на шаг счета по времени (5.6), что может вызвать, при наличии в системе «разномасштабных» (как «длинных», так и «коротких») трубопроводов, значительные непроизводительные затраты вычислительных ресурсов, т.к. условие (5.6) для самого короткого трубопровода будет ограничивать снизу число расчетных точек и шаг счета.

#### 5.1.4. Разрешение краевых условий

Обозначим входящие в узел  $j$  инварианты как

$$\psi_{i.in}^j = \begin{cases} r_{i,N}, & \text{если } i \in R_+^j; \\ s_{i,0}, & \text{если } i \in R_-^j; \end{cases} \quad (5.7)$$

и выходящие из узла  $j$  инварианты

$$\psi_{i.out}^j = \begin{cases} s_{i,N}, & \text{если } i \in R_+^j; \\ r_{i,0}, & \text{если } i \in R_-^j. \end{cases} \quad (5.8)$$

Введём векторные обозначения

$$\vec{\psi}_{in}^j = \{ \psi_{i,in}^j \}_{i \in R^j}, \quad \vec{\psi}_{out}^j = \{ \psi_{i,out}^j \}_{i \in R^j} \quad (5.9)$$

Используя соотношения (5.7) - (5.9), (2.3) и (2.52), можно выразить «основные» переменные через входящие и выходящие инварианты

$$H_i^j = \eta_i^j \cdot \frac{a_i}{g} \cdot (\psi_{i,in}^j - \psi_{i,out}^j), \quad p_i^j = \rho g \cdot (H_i^j - z^j), \quad V_i^j = \psi_{i,in}^j + \psi_{i,out}^j, \quad Q_i^j = \omega_i \cdot (\psi_{i,in}^j + \psi_{i,out}^j) \quad (5.10)$$

Подставляя эти выражения в граничные условия (см. раздел 3), можно переформулировать граничные условия относительно граничных значений инвариантов (входящих  $\vec{\psi}_{in}^j$  и выходящих  $\vec{\psi}_{out}^j$ ) и собственных параметров узла. Из естественного требования корректности граничных условий [137] следует, что полученная система уравнений должна иметь однозначное решение, если считать значения входящих инвариантов известными.

В случае явной схемы, конечно-разностные соотношения (5.5) позволяют получать значения искомых параметров во внутренних точках трубы и значения входящих инвариантов (5.7).

## 5.2. Гидропривод машины литья под давлением.

Схема гидропривода представлена на рис.5.2. Нестационарный процесс возникал вследствие удара пресс-поршня 4 о жидкий металл 5.

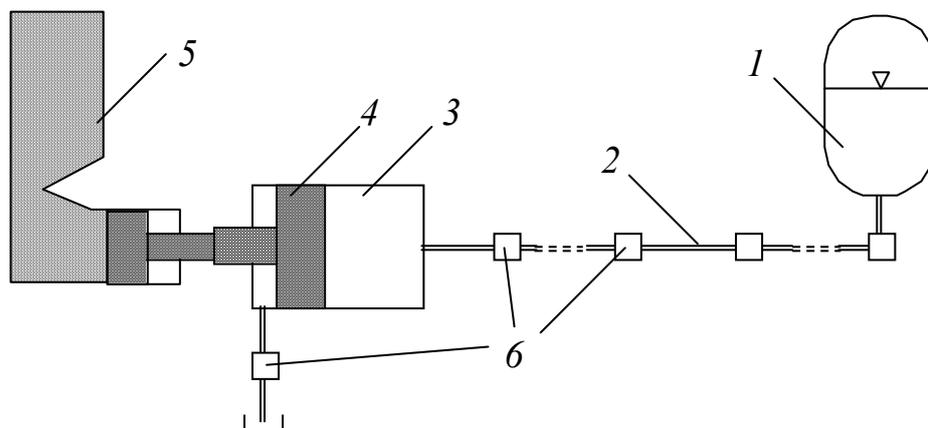


рис.5.2. Расчетная схема механизма прессования.

1 – аккумулятор; 2 – напорный трубопровод; 3 – поршневая полость цилиндра прессования; 4 – пресс-поршень; 5 – пресс-форма; 6 – местные сопротивления.

Здесь узлы 6 являются местными сопротивлениями; узел 1 (аккумулятор) представляет собой источник высокого давления  $p_g$  (см. раздел 3.3).

Граф рассматриваемого гидропривода представлен на рис.5.3.



рис.5.3. Граф гидропривода машины для литья под давлением.

0 – аккумулятор; 1 – цилиндр прессования; 2 – слив;

3, ..., N – местные сопротивления.

Т.к. процесс носит высокоинтенсивный характер, счет ведется по явной схеме бегущего счета, т.е. по схеме (5.5) при выполнении условия (5.6), причем, для того, чтобы свести к минимуму влияние счетной вязкости, значения  $\mu_i$  выбираются как можно ближе к 1 «снизу» ( $\mu_i \leq 1$ ). Нахождение выходящих из узла инвариантов осуществляется по следующим формулам.

#### 5.2.1. Аккумулятор.

В данном устройстве поршень отсутствует, поэтому уравнение (3.31) превращается в равенство давлений

$$p_k = p_g. \quad (5.11)$$

Так как с узлом соединена всего одна труба, то условия подхода (3.2) будут выглядеть следующим образом (гидростатическим давлением  $\rho gh^j$  по сравнению с  $p_g$  пренебрегаем, положительное направление расхода - вверх)

$$p_i^j - p_k \approx -\xi \frac{\eta_i^j m |m|}{2\rho\omega^2}, \quad (5.12)$$

где  $\omega$  – площадь соединительного патрубка;  $i$  – номер примыкающей к узлу  $j$  трубы. Здесь  $\xi$  – коэффициент сопротивления, который зависит, в общем случае, от направления потока

$$\xi = \begin{cases} \xi_+ & , \text{ при } m \geq 0; \\ \xi_- & , \text{ при } m < 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

Баланс масс (3.5) в данном случае будет выглядеть следующим образом

$$\rho\omega_i V_i^j = -m. \quad (5.14)$$

Подставляя соотношения (5.10) в вышеприведенные уравнения, находим

$$m = -\frac{2\rho\omega(2\rho a \cdot \bar{s} + \bar{p}_g)}{\rho a + \sqrt{\rho^2 a^2 + 2\xi\rho \cdot |2\rho a \cdot \bar{s} + \bar{p}_g|}} = -\frac{2\rho\omega\left(2 \cdot \bar{s} + \frac{\bar{p}_g}{\rho a}\right)}{1 + \sqrt{1 + 2 \frac{\xi}{a} \cdot \left|2 \cdot \bar{s} + \frac{\bar{p}_g}{\rho a}\right|}}, \quad (5.15)$$

где  $\bar{s} = s_{i,N}^{k+1}$  – посчитанный (5.5) входящий инвариант на новом слое по времени.

Здесь  $\bar{p}_g$  – давление газа на новом слое по времени, которое рассчитывается, исходя из уравнения политропы (3.29)

$$\bar{p}_g \approx p_g \cdot \left(1 + \tau \frac{m}{\rho} \frac{n}{W_g}\right). \quad (5.16)$$

где  $p_g$ ,  $W_g$  и  $m$  – значения давления газа, его объёма и массового расхода на предыдущем («известном») шаге по времени.

Отметим, что знак  $m$  априори можно определить по знаку выражения  $2s + \bar{p}_g / \rho a$

$$m \geq 0 \Leftrightarrow (2 \cdot \bar{s} + \bar{p}_g / \rho a) \leq 0, \text{ и } m < 0 \Leftrightarrow (2 \cdot \bar{s} + \bar{p}_g / \rho a) > 0 \quad (5.17)$$

Зная расход  $m$  и давление газа  $\bar{p}_g$ , по формуле (5.12) легко посчитать давление на конце трубы  $p_i^j$ , а затем, по определению (2.51), и выходящий инвариант.

### 5.2.2 Местные сопротивления.

Местные сопротивления описываются уравнениями (3.35) – (3.36). Используя соотношения (5.7) – (5.9), и считая входящие инварианты посчитанными, из граничных условий получаем расход через местное сопротивление

$$m = \frac{4g(\bar{r}_i + \bar{s}_k)}{\frac{1}{\rho} \left( \frac{a_i}{\omega_i} + \frac{a_k}{\omega_k} \right) + g\mu A + \sqrt{\left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{a_i}{\omega_i} + \frac{a_k}{\omega_k} \right) + g\mu A \right]^2 + 8Bg \cdot |\bar{r}_i + \bar{s}_k|}}. \quad (5.18)$$

где  $\bar{r}_i$  и  $\bar{s}_k$  обозначают посчитанные входящие в узел инварианты на  $k+1$  - ом слое по времени.

Зная  $m$ , выходящие инварианты легко посчитать на основе закона

отражения (3.35)

$$\bar{s}_i = -\bar{r}_i + \frac{m}{\rho\omega_i} \text{ И } \bar{r}_k = -\bar{s}_k + \frac{m}{\rho\omega_k}. \quad (5.19)$$

Отметим, что априори знак  $m$  можно определить по знаку суммы входящих инвариантов

$$m \geq 0 \Leftrightarrow (\bar{r}_i + \bar{s}_k) \geq 0 \text{ И } m < 0 \Leftrightarrow (\bar{r}_i + \bar{s}_k) < 0. \quad (5.20)$$

### 5.2.3. Цилиндр прессования

Пренебрегая волновыми процессами внутри цилиндра прессования, его можно описать следующими уравнениями

$$p_i^j - p_{hp} = \xi_{in} \frac{m_{in} \cdot |m_{in}|}{2\rho\omega_i^2}. \quad (5.21)$$

Поведение давления в напорной полости цилиндра прессования

$$m_{in} - \rho S_p V_p = \frac{dp_{hp}}{dt} \cdot \frac{S_p L_p}{a_p^2}. \quad (5.22)$$

и в сливной полости

$$\rho S_{dr} V_p - m_{out} = \frac{dp_{dr}}{dt} \cdot \frac{S_{dr} L_{dr}}{a_p^2}. \quad (5.23)$$

Баланс сил на поршне

$$M_p \frac{dV_p}{dt} = S_p p_{hp} - S_{dr} p_{dr} - S_m p_m - F_{fr}. \quad (5.24)$$

Поведение жидкого металла

$$\rho_m S_m V_p = \frac{M_m}{E_m} \frac{dp_m}{dt}. \quad (5.25)$$

Потери на вытекание

$$p_{dr} - p_k^j = \xi_{out} \frac{m_{out} \cdot |m_{out}|}{2\rho\omega_k^2}. \quad (5.26)$$

Здесь  $p_{hp}$  – давление в нагнетательной полости цилиндра прессования (ЦП);  $m_{in}$  – массовый расход, втекающий в ЦП;  $\xi_{in}$  – сопротивление входа в ЦП;  $S_p$  – площадь сечения ЦП;  $V_p$  – скорость движения пресс-поршня;  $L_p$  – длина полости ЦП;  $a_p$  – скорость волны гидравлического удара для толстостенного цилиндра;  $p_{dr}$  – давление в сливной полости;  $S_{dr}$  – площадь поршня со стороны

сливной полости;  $L_{dr}$  – длина сливной полости;  $m_{out}$  – вытекающий массовый расход;  $M_p$  – масса пресс-поршня;  $F_{fr}$  – сила трения на поршне;  $\xi_{out}$  – сопротивление вытекания;  $S_m$  – площадь поршня, оказывающего давление на жидкий металл;  $p_m$  – давление жидкого металла;  $\rho_m$  – плотность жидкого металла;  $E_m$  – объёмный модуль упругости жидкого металла;  $M_m$  – масса жидкого металла, залитого в пресс-форму.

#### 5.2.4. Слив

На сливе задаются потери на истечение под атмосферное давление

$$p_k^j - p_{am} = \xi^j \frac{m_i^j \cdot |m_i^j|}{2\rho\omega_i^2}. \quad (5.27)$$

Аналогично случаю местного сопротивления, при помощи (2.51) – (2.52), получаем уравнение относительно вытекающего массового расхода

$$m = \frac{2\rho\omega_k \left( 2\bar{r}_k^j - \frac{p_{am}}{\rho a_k} \right)}{1 + \sqrt{1 + 2 \frac{\xi^j}{a_k} \left| 2\bar{r}_k^j - \frac{p_{am}}{\rho a_k} \right|}} \quad (5.28)$$

Заметим, что знак  $m$  априори можно определить по знаку выражения  $2\bar{r} - \bar{p}_{am}/\rho a$

$$m \geq 0 \Leftrightarrow (2\bar{r} - \bar{p}_{am}/\rho a) \geq 0, \text{ и } m < 0 \Leftrightarrow (2\bar{r} - \bar{p}_{am}/\rho a) < 0 \quad (5.29)$$

Зная вытекающий расход  $m$  и входящий в узел инвариант  $\bar{r}_k^j$ , легко посчитать, на основе закона отражения (2.52), и выходящий из узла инвариант  $\bar{s}_k^j$

$$\bar{s} = -\bar{r} + \frac{\bar{m}}{\rho\omega_k}. \quad (5.30)$$

#### 5.2.5 Результаты расчета

На рис.5.4 представлены результаты расчета и эксперимента.

Результаты расчета и его сопоставление с натурным экспериментом показывают хорошую степень согласования как количественных, так и качественных характеристик нестационарного процесса.

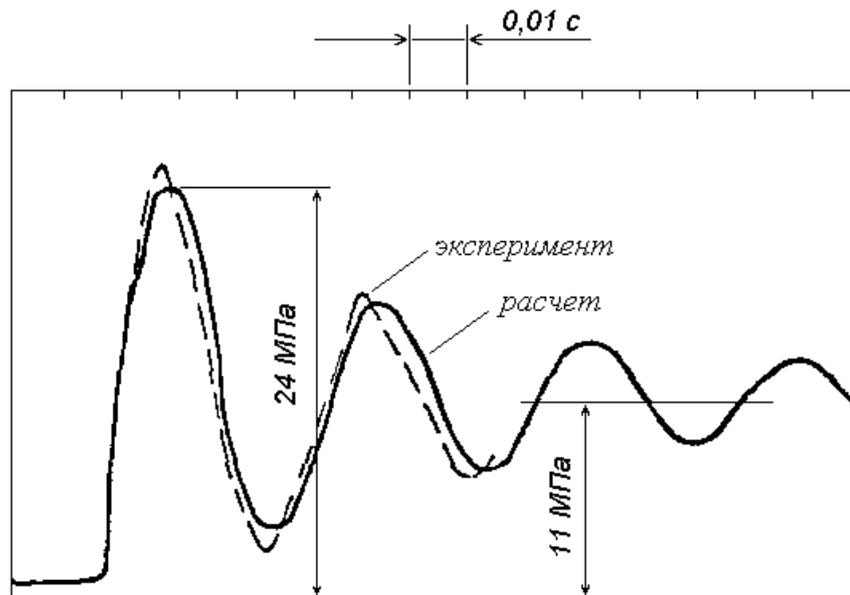


рис.5.4.

### 5.3. Применение неявной схемы бегущего счета

Для расчета плавноизменяющихся, низкоинтенсивных процесс может оказаться эффективным применение неявной схемы бегущего счета [137], шаблон которой представлена на рис.5.5.

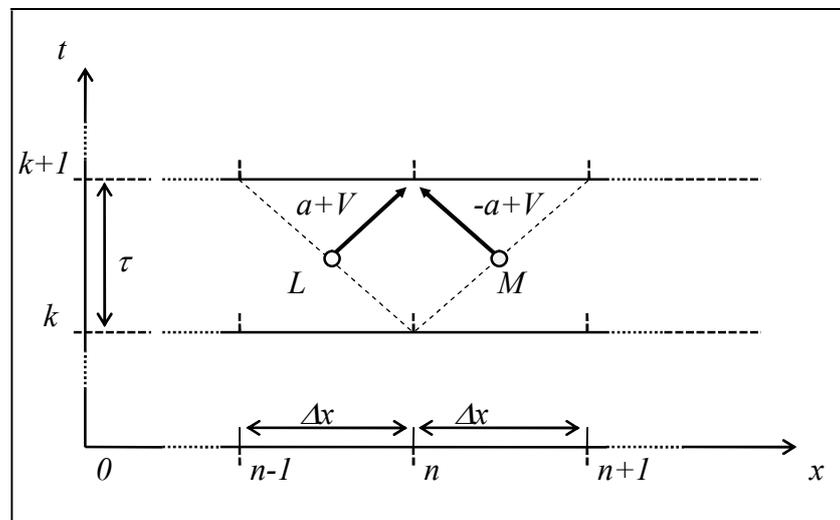


рис.5.5.

Аппроксимируя уравнения (2.53)–(2.54) по неявной разностной схеме бегущего счета (индекс  $i$  для простоты опущен)

$$\begin{aligned} \frac{r_n^{k+1} - r_n^k}{\tau} + a \frac{r_n^{k+1} - r_{n-1}^{k+1}}{h} &= -B_n^k \cdot (r_n^{k+1} + s_n^k), \\ \frac{s_n^{k+1} - s_n^k}{\tau} - a \frac{s_{n+1}^{k+1} - s_n^{k+1}}{h} &= -B_n^k \cdot (r_n^k + s_n^{k+1}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

получаем следующие расчетные зависимости

$$\begin{aligned} r_n^{k+1} &= \frac{\mu}{1 + \mu + \tau B_n^k} r_{n-1}^{k+1} + \frac{r_n^k - \tau B_n^k S_n^k}{1 + \mu + \tau B_n^k}, \text{ при } n = 1, \dots, N_i; \\ s_n^{k+1} &= \frac{\mu}{1 + \mu + \tau B_n^k} s_{n+1}^{k+1} + \frac{s_n^k - \tau B_n^k r_n^k}{1 + \mu + \tau B_n^k}, \text{ при } n = N_i - 1, \dots, 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Первая формула из соотношений (5.32) позволяют последовательно (двигаясь от 1 до  $N_i$ ) рассчитать на новом  $k+1$ -ом шаге значения неизвестных  $r_n^{k+1}$ , если известно значение выходящего граничного инварианта  $r_0^{k+1}$ . Вторая формула из соотношений (5.32) позволяют последовательно (двигаясь в обратном направлении, от  $N_i - 1$  до 0) рассчитать на новом  $k+1$ -ом шаге значения неизвестных  $s_n^{k+1}$ , если известно граничное значение выходящего инварианта  $s_N^{k+1}$ . Это позволяет получить «передаточные» соотношения, связывающие выходящие и входящие значения одноименных инвариантов

$$r_N^{k+1} = \varepsilon \cdot r_0^{k+1} + \Phi_r, \quad s_0^{k+1} = \beta \cdot s_N^{k+1} + \Phi_s, \quad (5.33)$$

где передаточные коэффициенты определяются по следующим рекуррентным соотношениям

$$\varepsilon^{(n)} = \frac{\mu}{1 + \mu + \tau B_n^k} \cdot \varepsilon^{(n-1)}, \quad \Phi_r^{(n)} = \frac{\mu}{1 + \mu + \tau B_n^k} \Phi_r^{(n-1)} + \frac{r_n^k - \tau B_n^k S_n^k}{1 + \mu + \tau B_n^k}$$

при  $n = 1, \dots, N_i$ , где  $\varepsilon^{(0)} = 1$ ,  $\Phi_r^{(0)} = 0$ ;

$$\beta^{(n)} = \frac{\mu}{1 + \mu + \tau B_n^k} \cdot \beta^{(n+1)}, \quad \Phi_s^{(n)} = \frac{\mu}{1 + \mu + \tau B_n^k} \cdot \Phi_s^{(n+1)} + \frac{s_n^k - \tau B_n^k r_n^k}{1 + \mu + \tau B_n^k}$$

при  $n = N_i - 1, \dots, 0$ , где  $\beta^{(N)} = 1$ ,  $\Phi_s^{(N)} = 0$ .

В результате имеем

$$\varepsilon = \varepsilon^{(N)}, \quad \Phi_r = \Phi_r^{(N)}, \quad \beta = \beta^{(0)}, \quad \Phi_s = \Phi_s^{(0)}. \quad (5.35)$$

### 5.3.1 Нахождение выходящих инвариантов в узлах.

Для определения значений выходящих из узлов инвариантов используются граничные условия, также, аналогично предыдущему случаю, записанные в инвариантах и при необходимости линеаризованные. Но в отличие от

предыдущего случая, граничные условия совместно с прогоночными соотношениями (5.33) для всех труб будут составлять связную воедино систему уравнений, которую уже невозможно решать "по частям", для каждого узла в отдельности, как это делалось в случае применения явных схем (см. выше).

Решение этой большой системы уравнений представляет собой основную вычислительную трудность при использовании неявных схем. Для ее решения применяются различные подходы, большинство из которых используют приближенные численные методы.

Наиболее «универсальным» из них можно считать методы, основанные на итерациях. Такой подход приемлем для трубопроводных систем любой структуры и любых видов диссипативных граничных условий [38, 39].

Суть такого подхода состоит в следующем.

За нулевое приближение принимаются значения выходящих инвариантов, посчитанные на предыдущем шаге по времени. Используя передаточные соотношения (5.33), рассчитываются значения всех входящих в каждый узел инвариантов. Затем для каждого узла в отдельности находятся значения выходящих из этого узла инвариантов так же, как это делалось в случае использования явной схемы бегущего счета (см. примеры выше). Эти значения принимаются за первое приближение итераций, затем вся процедура повторяется, получается второе приближение, и т.д.

Т.к. передаточные коэффициенты  $\varepsilon$  и  $\beta$  в формулах (5.33) по построению, значительно меньше единицы, а граничные условия диссипативны [137], это гарантирует, что возможные погрешности будут достаточно быстро затухать в процессе итераций. На практике обычно хватало 3-5 итераций для достижения приемлемой точности расчетов.

Преимущество такого подхода в том, что он требует минимального усложнения алгоритма расчета по сравнению с явной разностной схемой. Дополнительно требуется только насчитать передаточные соотношения (5.33); а граничные условия разрешаются точно так же, как и в случае явной

разностной схемы (только многократно). При этом, вообще говоря, не требуется линеаризации граничных условий, что ценно.

### 5.3.2. Замечание о линеаризации формулы местных потерь.

Местные сопротивления является, пожалуй, самым распространенным видом и присутствуют практически в каждой гидравлической системе.

Традиционно для нахождения местных потерь используется формула [71, 147, 64]

$$\Delta H = \zeta \frac{V \cdot |V|}{2g} = \zeta \frac{Q|Q|}{2g\omega_p^2}, \quad (5.36)$$

где  $\zeta$  – безразмерный коэффициент местного сопротивления;  $V$  – скорость за местным сопротивлением;  $Q$  – расход через местное сопротивление;  $\omega_p$  – площадь проходного сечения.

Иногда эту зависимость используют в виде

$$Q = \omega_p \cdot \text{sign}(\Delta H) \cdot \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\zeta}}. \quad (5.37)$$

Недостатком этих формул является то, что  $Q = 0$  является особой точкой.

Например, если линеаризацию (5.36) провести стандартным образом

$$\overline{\Delta H} \approx \frac{\zeta}{2g\omega_p^2} \cdot [Q|Q| + 2|Q| \cdot (\overline{Q} - Q)] = \frac{\zeta}{2g\omega_p^2} (2|Q|\overline{Q} - Q|Q|), \quad (5.38)$$

то при  $Q = 0$  на предыдущем шаге получаем  $\overline{\Delta H} = 0$  на новом шаге, что порождает искусственную «болтанку» решения.

Положение не спасает, если воспользоваться формулой (5.37). Линеаризуя её, получаем

$$\overline{Q} \sqrt{\Delta H} \approx \omega_p \cdot \sqrt{\frac{2g}{\zeta}} \cdot \frac{|\Delta H| + \text{sign}(\Delta H) \cdot \overline{\Delta H}}{2}, \quad (5.39)$$

откуда видно, что малый перепад на предыдущем шаге по времени  $\Delta H \approx 0$  может породить неоправданно большие значения  $\overline{Q}$  на новом шаге, т.е. опять имеем «болтанку» решения.

Здесь черта над переменной означает, что она рассматривается на «новом»,  $k+1$  –м шаге по времени, а отсутствие черты – что на «старом»,  $k$ -том шаге по времени.

Поэтому более корректно воспользоваться двучленной формулой потерь (3.35), учитывающей ламинарную часть сопротивления и не имеющей особых точек (при  $A^j \neq 0$ ). В этом случае

$$\Delta H \approx \mu \cdot A^j \cdot \rho \bar{Q} + \zeta \frac{1}{2g\omega_p^2} (Q|Q| + 2|Q|(\bar{Q} - Q)) = \left[ \rho \mu A^j + \zeta \frac{|Q|}{g\omega_p^2} \right] \bar{Q} - \zeta \frac{Q|Q|}{2g\omega_p^2}, \quad (5.40)$$

откуда видно, что ни  $Q = 0$ , ни даже  $\zeta = 0$  не приводит к вырождению коэффициентов.

### 5.3.3 Разрешение граничных условий прогонкой

Если трубопроводная система не содержит закольцованных участков (её граф представляет собой дерево), то можно организовать эффективный алгоритм прогонки [18]. При этом потребуются линеаризация всех граничных условий.

Алгоритм опирается на специальную нумерацию труб и узлов (которую всегда можно добиться при отсутствии закольцованных участков). Трубы и узлы нумеруются таким образом, чтобы 1) в каждый узел входит только одна труба, а все остальные (если они есть) – выходящие; 2) номер узла совпадает с номером этой входящей трубы; 3) номера остальных (выходящих из узла труб) больше, чем номер единственной входящей трубы. Имеется только один узел (которому присвоен номер 0), откуда все трубы только выходят.

Все нелинейные граничные условия должны быть линеаризованы.

В обобщенном виде алгоритм изложен в работе [38, 39], конкретная реализация для трубопроводной системы описана в [18].

В отдельных случаях возможно использование прямых методов решения (например, метода исключения Гаусса), если размерность системы невелика.

Неявная схема обладает абсолютной устойчивостью, позволяя вести устойчивый счет при любых числах Куранта, т.е. при любых значениях пространственных и временных шагов. Это дает возможность менять шаг счета в процессе вычислений, увеличивая шаг счета на медленно меняющейся стадии процесса.

Однако недостатком неявной схемы, помимо ее алгоритмической сложности, является ее свойство «размазывать», сглаживать решения, особенно на участках с большими градиентами. Поэтому неявную схему целесообразно применять для расчетов достаточно плавно изменяющихся течений.

Примером такой трубопроводной системы, чья структура не содержит закольцованных участков может служить напорная оросительная сеть.

#### 5.4 Нестационарный процесс в напорной оросительной сети.

Напорная оросительная сеть изображена на рис.5.6. Трубы и узлы системы пронумерованы. Номера в кружках – номера узлов, номера без кружков – номера труб. Граф трубопроводной системы напорной оросительной сети представлен на рис.5.7.

Нестационарный процесс в системе, возникающий вследствие подключения или отключения дождевальных установок, представляет собой достаточно плавнопротекающий процесс.

Рассматривается переходной процесс, возникающий при отключении гидранта в конце 27-й трубы. Этот процесс задаётся графиком снижения расхода в узле 27 от  $0,1 \text{ м}^3/\text{сек}$  до 0 в течение первых 40 секунд (кривая 1 на рис.5.8); далее гидрант закрыт. Этот график снижения расхода, являясь источником возмущения параметров потока во всей сети, носит достаточно плавный характер; достаточно, например, шага 0,5 секунды, чтобы аппроксимировать ломаной линией практически не отличимой от исходной кривой; т.е. шаг 0,5 секунды будет вполне достаточен.

Таким образом. течения, возникающие в трубах напорной оросительной сети, можно отнести к классу слабоинтенсивных процессов.

Однако, если использовать явную разностную схему (5.5), то условие Куранта (5.6) требует шагов по времени на два порядка меньше, чем 0,5 сек, т.е. примерно 0,005 сек, что порождает неоправданно длительный счет всего переходного процесса. Если же проводить счет с соответствующим интенсивности процесса шагом по времени около 0,5 сек, то это неизбежно

потребуется применения неявной схемы расчета, а соответствующие числа Куранта  $\mu_i$  будут исчисляться десятками.

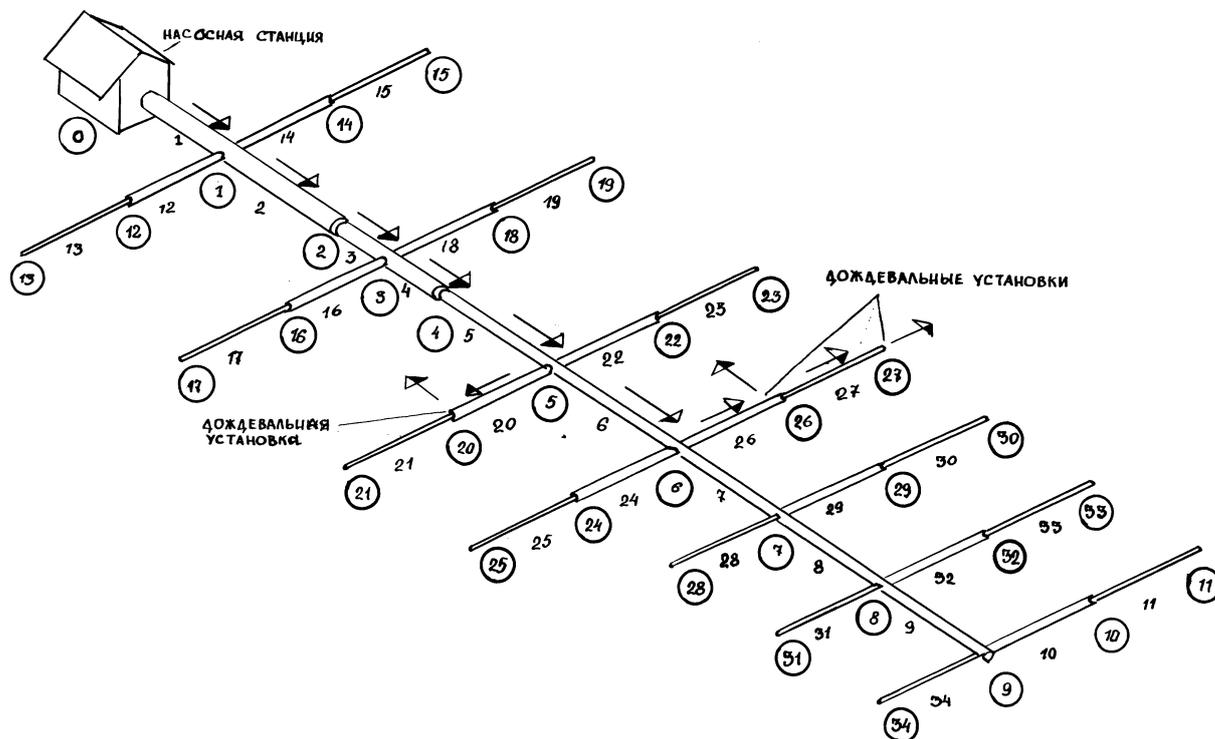


рис.5.6. Напорная оросительная сеть.

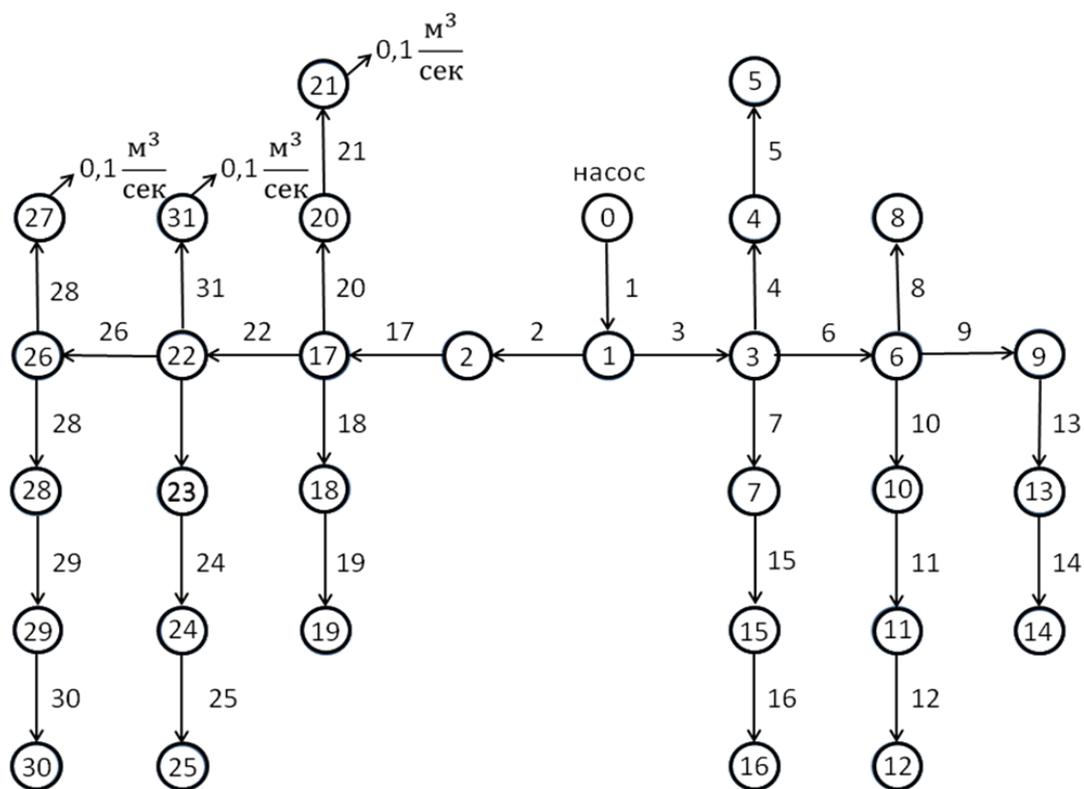


рис.5.7. Граф напорной оросительной системы.

Применение неявной схемы (5.32) оказывается в данном случае весьма эффективным; отсутствие у сети закольцованных участков позволяет успешно применить алгоритм прогонки для разрешения граничных условий.

На рис.5.8 представлены результаты расчета. Наиболее интенсивный всплеск давления (гидравлический удар) будет наблюдаться у закрывающегося гидранта (кривая 2 на рис.5.8); а наиболее сильные и продолжительные колебания расхода будут наблюдаться на выходе из насосной станции (кривая 3 на рис.5.8).

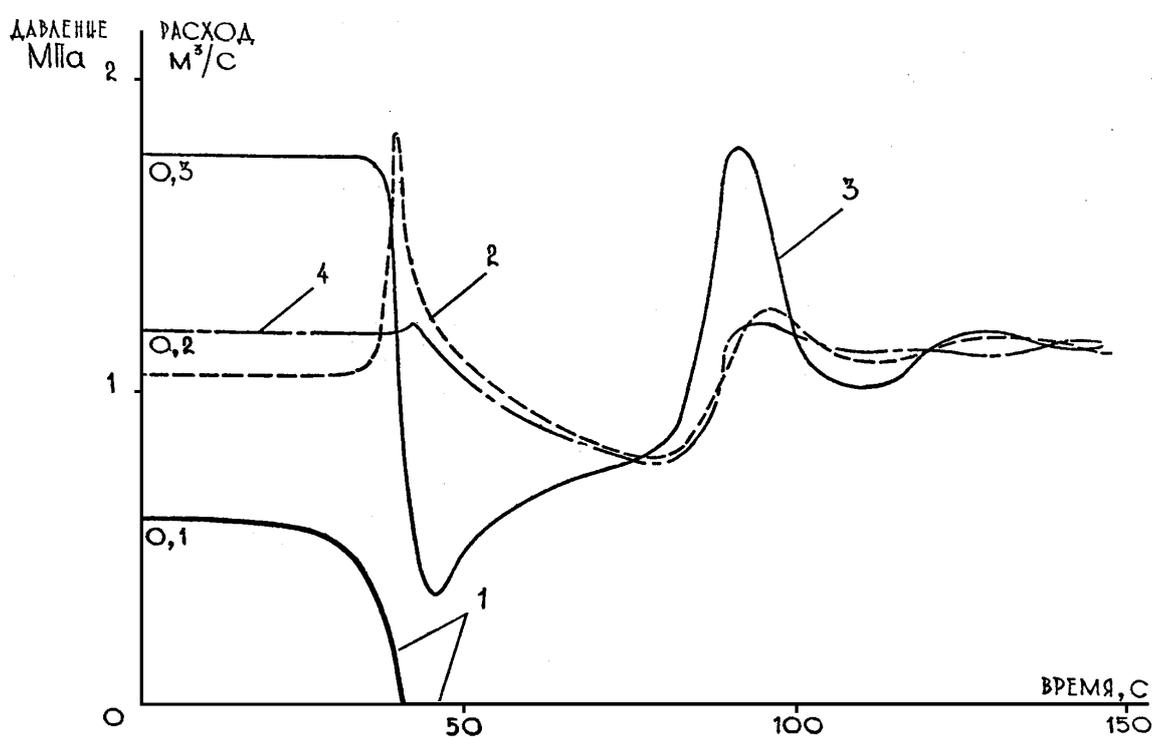


рис.5.8. Графики изменения параметров потока в сети.

1 – расход в конце 27-й трубы; 2 – давление в конце 27-й трубы;  
3 – расход и 4 – давление в начале 1-й трубы (выход насосной станции).

#### 5.5. Явно-неявная схема для расчета потоков в трубопроводной системе.

Наиболее эффективной для расчетов нестационарных процессов в трубопроводной системе представляется следующая явно-неявная схема, которая является комбинацией схем (5.4) и (5.32) (индекс  $i$  для простоты опущен)

$$r_n^{k+1}(1 + \mu - \eta + \tau \cdot B_n^k) = r_n^k(1 - \eta) + \eta \cdot r_{n-1}^k + (\mu - \eta) \cdot r_{n-1}^{k+1} - \tau \cdot B_n^k \cdot s_n^k, \quad (5.41)$$

$$s_n^{k+1}(1 + \mu - \eta + \tau \cdot B_n^k) = s_n^k(1 - \eta) + \eta \cdot s_{n+1}^k + (\mu - \eta) \cdot s_{n+1}^{k+1} - \tau \cdot B_n^k \cdot r_n^k, \quad (5.42)$$

где  $k$  - номер шага по времени,  $n$  - номер шага по длине,  $\mu$  - коэффициент Куранта (5.6).

Параметр  $\eta$  выбирается следующим образом

$$\eta_i = \min(1, \mu_i). \quad (5.43)$$

При выполнении условия Куранта (5.6) из условия (5.43) следует  $\eta = \mu$ , и уравнения (5.41) – (5.42) дают явную схему бегущего счета (5.5); при  $\eta = 0$  получается неявная схема бегущего счета (5.32), которая устойчива при любых числах Куранта  $\mu$  (отсутствуют ограничения вида (5.6)), т.е. при любом значении шага  $\tau$ .

Эта схема позволяет гибко приспособливаться к индивидуальным особенностям системы и нестационарного процесса, осуществляя счет на одних (более «важных») участках сети по явной схеме, а на других (менее «значительных») – по неявной. В случае наличия участков счета по неявной схеме, граничные условия решаются по одной из методик, описанных выше. Однако в данном случае единая система уравнений может распадаться на несколько автономных подсистем меньшей размерности, что ускоряет процесс решения.

### 5.5.1. «Длинные» и «короткие» трубы

Как уже упоминалось выше, для расчета высокоинтенсивных процессов желательно применение явной схемы, например, явной схемы бегущего счета (5.5). Пусть определен шаг по времени  $\tau$ . Выбор шагов по длине каждой трубы желательно осуществлять таким образом, чтобы число Куранта было максимально близком к единице. Это уменьшает эффект счетной вязкости [137] и предохраняет от «размазывания» крутых волн. Исходя из этих соображений, из (5.6) получаем, что число шагов по длине  $i$ -той трубы следует выбирать как наибольшее  $N_i$ , удовлетворяющее неравенству

$$N_i \leq \frac{L_i}{a_i \tau}, \quad \text{или} \quad N_i = \left\lfloor \frac{L_i}{a_i \tau} \right\rfloor, \quad (5.44)$$

где  $L_i$  – длина  $i$ -той трубы.

Если формула (5.44) не позволяет определить положительное  $N_i$ , (т.е. при  $L_i < a_i \cdot \tau$ ), то такую трубу будем называть «короткой», в противном случае – «длинной». Из вышесказанного следует, что понятие «короткая труба» является условным и зависит от выбора шага счета  $\tau$ . При  $\tau \rightarrow 0$  все «короткие» трубы становятся «длинными».

Наличие «коротких» труб в трубопроводной системе может ощутимо осложнить расчет. Действительно, требование (5.44) накладывает на шаг счета ограничение

$$\tau \leq \min_i \frac{L_i}{a_i}, \quad (5.45)$$

где минимум рассматривается по всем трубам системы. Если в системе есть «короткие» трубы, то шаг  $\tau$ , выбранных по (5.45), может оказаться слишком мелким, а счёт с таким шагом – слишком медленным. При этом, если выбирать шаги по пространству, руководствуясь (5.44), то получится очень большое количество расчетных точек, что значительно увеличит время счета. Если же сохранить большие шаги по пространству, это породит малые значения чисел Куранта, и приведет к счетному размазыванию волновых фронтов.

Для борьбы с «эффектом коротких труб» можно применять, например, искусственное удлинение этих труб до минимально приемлемых размеров. Но такой подход чреват искажением частотных характеристик системы и результатов расчета [194]. Другой путь состоит в замене «короткой трубы» неким узлом (объектом с сосредоточенными параметрами). Такой путь ведет к усложнению алгоритма (иногда существенному).

Наиболее эффективным (и универсальным) представляется тут применение явно-неявной схемы (5.41) – (5.42), когда «длинные» трубы считаются по явной схеме, а «короткие» – по неявной.

## 5.6 Расчет распространения возмущений в системе технологических трубопроводов АЭС.

Упрощенная схема системы технологических трубопроводов АЭС представлена на рис.5.9.

Рабочая жидкость (вода) от четырех главных циркуляционных насосов (ГЦН) поступает в напорный коллектор (НК), откуда по 22 раздаточным коллекторам (РК) подается через систему водяных трубопроводов (по 45 трубопроводов от каждого раздаточного коллектора) в рабочую зону.

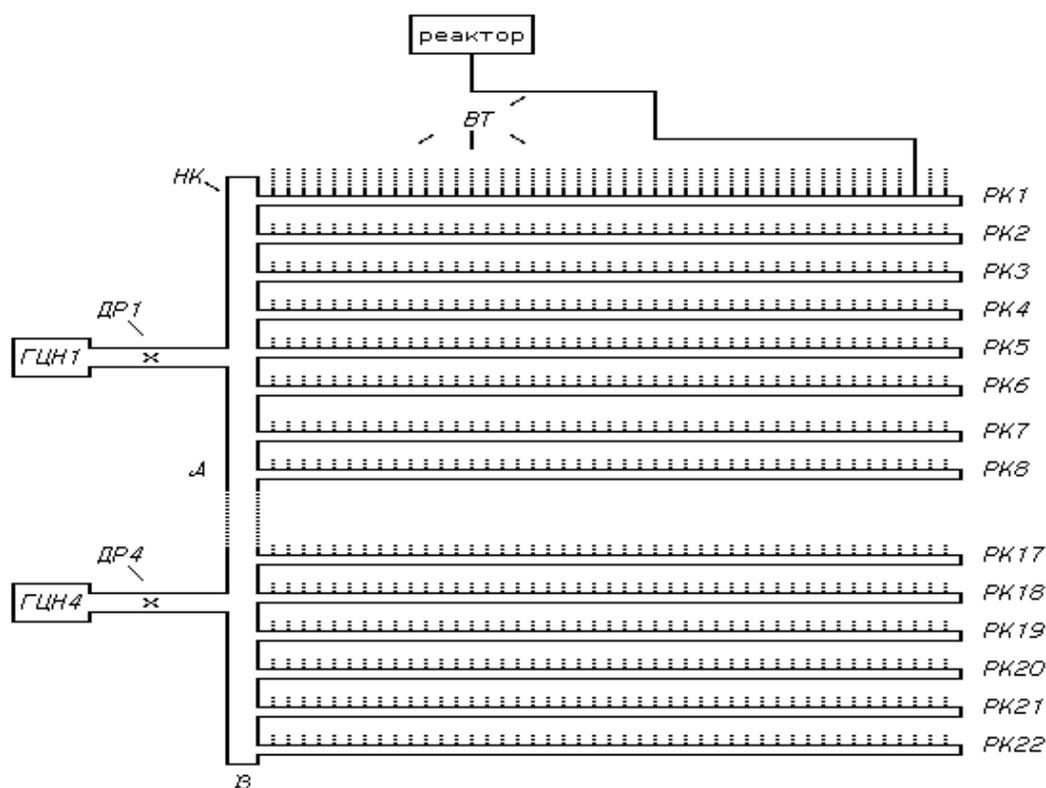


рис.5.9. Упрощенная схема системы технологических трубопроводов АЭС.  
 ГЦН1 - 4 – главные циркуляционные насосы; ДР1 - 4 – дроссели-регуляторы;  
 НК - напорный коллектор; РК1 – 22 – раздаточные коллекторы;  
 ВТ - водяные трубопроводы.

Нестационарный режим работы в системе возникает вследствие нестационарности работы дросселей-регуляторов ДР1 – ДР4, расположенных на напорных патрубках ГЦН (например, кривая 1 на рис.5.10). Возмущение носит достаточно хаотический характер, и распространяется по всем трубопроводами системы.

Исследуемая система состоит из 1017 трубопроводов и разбивается примерно на 2000 расчетных участков. Применение явной схемы требует выполнения условия (5.44) для каждого из этих участков, что требует таких больших вычислительных ресурсов (оперативной памяти и машинного времени), что делает многократный просчет различных вариантов весьма затруднительным. Для увеличения эффективности счета исходная схема трубопроводной системы заменялась на упрощенную с эквивалентными характеристиками по методике, описанной в ниже (см. раздел 6), что позволило в десятки раз увеличить производительность вычислений при сохранении приемлемой точности расчетов.

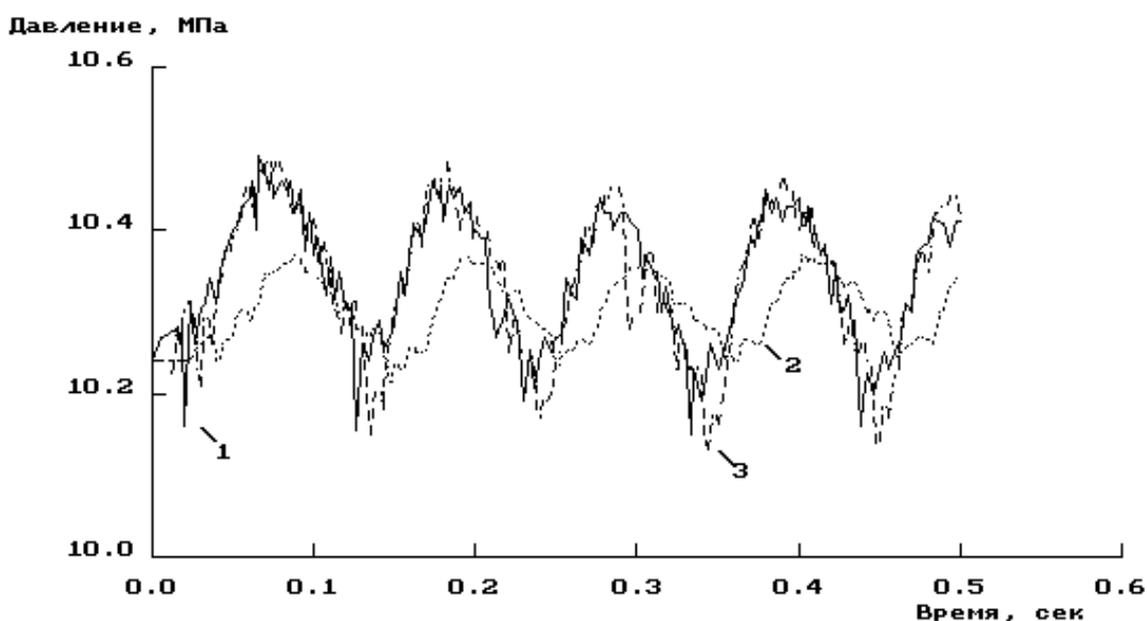


рис.5.10. Давление в различных точках системы технологических трубопроводов АЭС.

1 – давление в источнике возмущения (за дросселем ДР1),  
2 – давление в средней части НК; 3 – давление в тупике НК (точка “В”).

На рис.5.10 представлены результаты расчета нестационарного процесса в системе вследствие случайных колебаний дросселя-регулятора ДР1. Здесь кривая 1 описывает давление в источнике возмущения (за дросселем ДР1), кривая 2 – давление в средней части НК (точка “А”) и кривая 3 – в тупике НК (точка “В”).

Результаты расчетов использовались при оценках надежности работы АЭС.

### 5.7. Расчет течений с кавитацией

Гидравлический удар, сопровождающийся разрывом сплошности, относится, несомненно, к высокоинтенсивным процессам. Как показано в разделе 4, разрыв сплошности может проявляться как в виде образования отдельных, изолированных каверн, так и виде обширной протяжённой кавитационной зоны (например, мелкопузырьковой кавитации). Возможно ли описать «протяжённую» кавитацию в виде отдельных изолированных каверн? В работе автора [154] был обоснован так называемый «метод контрольных точек», где показано, что если рассредоточить по потоку некоторое число отдельных изолированных каверн, то при увеличении «густоты» расположения таких «пробных» каверн результирующее течение будет всё более приближаться к «протяженной» форме кавитации. Разумеется, такой подход охватывает и случай образования отдельных «больших» каверн.

На практике алгоритмически удобно помещать такие «пробные» каверны («контрольные точки») в расчетные точки разностной сетки.

Итак, будем считать, что в каждой расчетной точке с номером  $n$  по длине ( $0 < n < N_i$ ) содержится некая «потенциальная» каверна. Признаком возникновения разрыва сплошности в этой точке будет система неравенств

$$p_n^k \geq p_{cav}, \quad p_n^{k+1} < p_{cav}, \quad (5.46)$$

а момент активации такой каверны определяется соотношением

$$t_{cav} = t^{<k>} + \tau \cdot \frac{p_n^k - p_{cav}}{p_n^k - p_n^{k+1}}, \quad (5.47)$$

где  $t^{<k>}$  – момент времени, соответствующий  $k$ -тому шагу.

С этого момента начинается рост каверны, определяемый соотношением (4.22).

На границе каверны ставятся граничные условия (4.24). Далее, поведение каверны описывается моделью (4.21) – (4.22), а момент схлопывания каверны

определяется по (4.23). После схлопывания каверны расчетная точка  $n$  опять становится «обычной» расчетной точкой со «спящей» потенциальной каверной. На участках между контрольными точками течение считается однородным (жидкая фаза) и рассчитывается по явной разностной схеме (5.5).

Для узлов создаётся дополнительный комплект граничных условий для случаев, когда там образуется кавитационная полость. Например, образование полостей на местном сопротивлении, появление полости в месте соединения труб, кавитации во всасывающей патрубке насоса, и т.п.

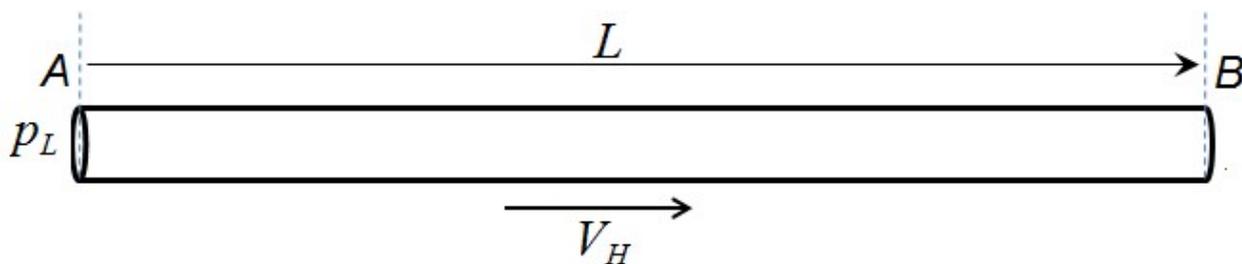


рис.5.11. Простой трубопровод.

Для тестирования указанной методики проводился обсчет экспериментальных данных для простого трубопровода, приведенных в работе [145]. В начале трубопровода (точка  $A$ , см. рис.5.11) задано постоянное давление  $p_L$ ; в конце трубопровода (точка  $B$ ) расположена быстродействующая задвижка. Начальная скорость течения жидкости в трубопроводе  $V_H$  задана. Гидравлический удар в трубопроводе создавался практически мгновенным закрытием задвижки.

После начального всплеска давления (гидравлический удар) в последующей фазе понижения давления при больших значениях  $V_H$  наблюдалось появление разрыва сплошности потока (кавитации).

Заметим, что для условий экспериментальной установки [145] имеем значение критической скорости  $V_{cr} \approx 0,2$  м/сек (см. (4.49)), что значительно превышает и  $0,48$  м/сек, и  $0,6$  м/сек. Это говорит о том, для рассматриваемых случаев должна наблюдаться развитая кавитация.

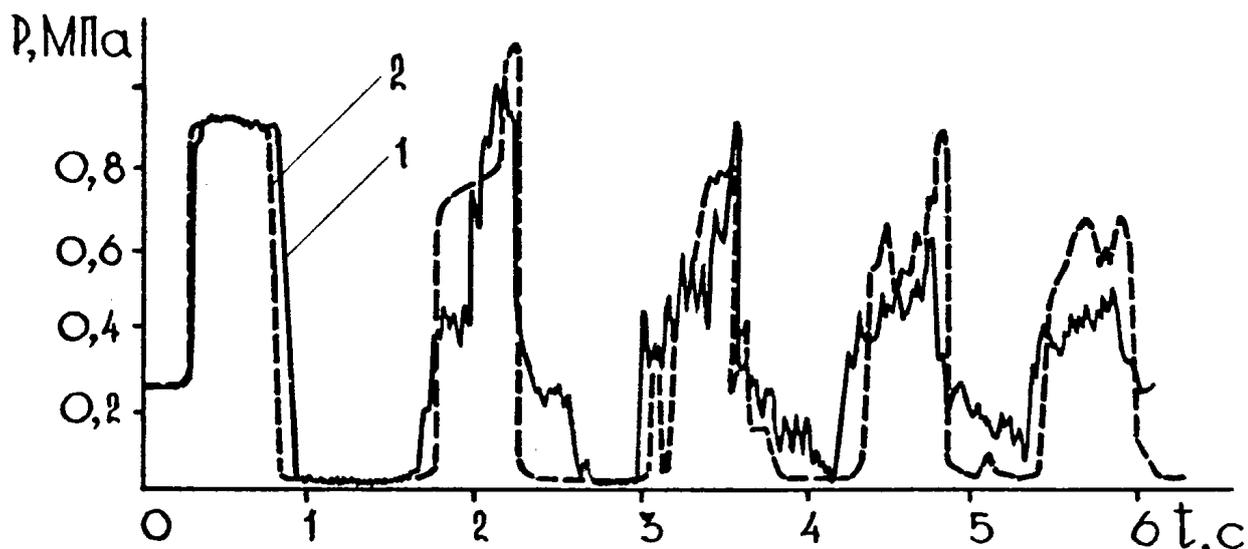


рис.5.12 Давление у задвижки при  $V_n = 0,48$  м/сек.  
1 – эксперимент [145]; 2 – расчет по методу контрольных точек.

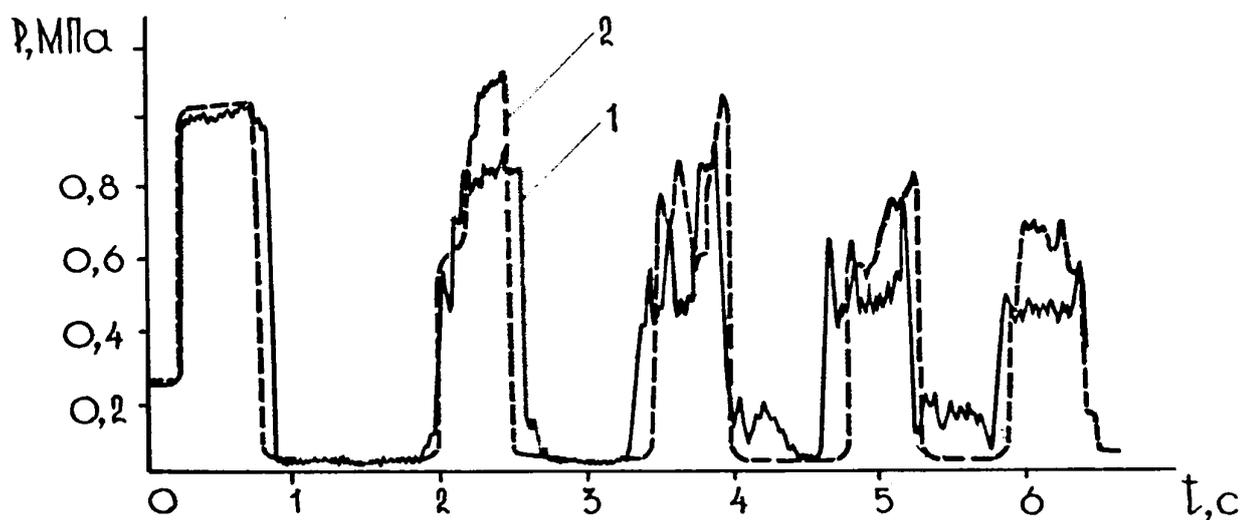


рис.5.13. Давление у задвижки при  $V_n = 0,6$  м/сек  
1 – эксперимент [145]; 2 – расчет по методу контрольных точек.

На рис.5.12 и рис.5.13 приведено сопоставление экспериментальных данных с результатами расчета для различных начальных скоростей.

На рис.5.14 приведено сопоставление экспериментальных данных, показывающих зависимость максимального давления в трубопроводе от начальной скорости движения жидкости, с результатами расчета по вышеописанной методике.

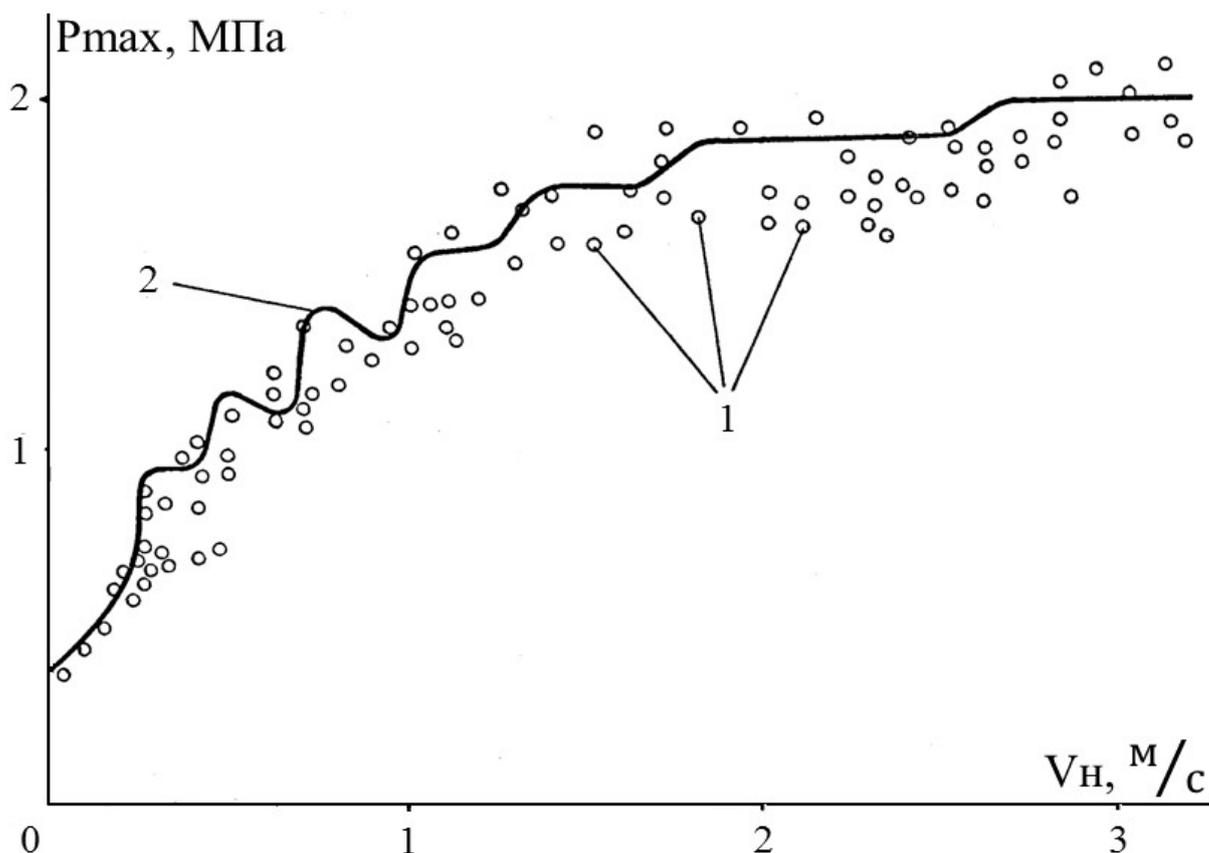


рис.5.14. Максимальное давление гидравлического удара в зависимости от начальной скорости.

1 – эксперимент [145]; 2 – расчет по методу контрольных точек.

Приведённые примеры показывают высокую степень согласования численных результатов и экспериментальных данных, что доказывает вполне приемлемую точность и адекватность метода контрольных точек для расчетов течений, сопровождающихся разрывом сплошности потока.

#### 5.8. Гидравлический удар в процессе тампонирувания скважины.

Гидравлический удар в системе коаксиальных труб существенно отличается от гидравлического удара в простом трубопроводе наличием взаимодействия через стенку внутренней трубы.

Примером нестационарного процесса такого рода может служить гидравлический удар, возникающий во время тампонажа скважины при посадке разделительной пробки на дно обсадной трубы.

Процесс тампонажа скважины изображен на рис.5.15. По внутренней трубе в скважину закачивается продавочный раствор 5, график подачи которого  $Q_n(t)$

считается известным. Под давлением продавочного раствора разделительная пробка *б* перемещается вниз и вытесняет цементный раствор *4* в затрубное пространство. После прохождения всей протяженности скважины *L* (т.е. когда весь цементный раствор вытеснен в затрубное пространство) разделительная пробка упирается в специальные ограничители и останавливается.

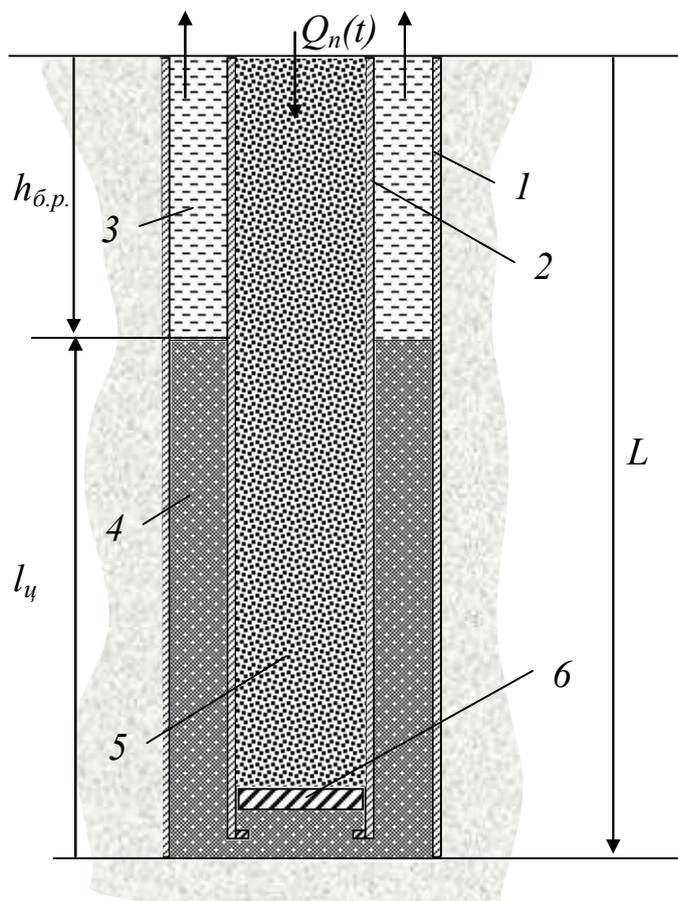


рис.5.15. Схема заполнения межтрубного пространства и посадки разделительной пробки.

Здесь 1 – стенка скважины; 2 – обсадная труба; 3 – буровой раствор;  
4 – тампонажный (цементный) раствор; 5 – продавочный раствор;  
6 – разделительная пробка.

Возникающий при этом гидравлический удар является существенным фактором, влияющим на гидроразрыв и поглощение пластов. Для правильной оценки этого фактора и выбора оптимального режима закачивания тампонажного раствора в обсадную колонну необходимо иметь достаточно точную методику расчета процесса. Указанная методика должна опираться на соответствующую достаточно точную и подробную математическую модель

исследуемого процесса.

Относительно гидродинамики тампонирувания скважины весь процесс можно разделить на две стадии. Первая стадия процесса включает в себя подачу тампонажного раствора и вытеснение его продавочным вплоть до момента достижения разделительной пробкой нижней отметки обсадной трубы и перекрытия потока; вторая стадия – собственно гидравлический удар, развивающийся в системе скважина – обсадная колонна после перекрытия проходных отверстий разделителем.

Хотя первая стадия процесса носит нестационарный характер, но при этом течение раствора имеет достаточно плавный характер, т.е. волновые процессы в нем играют незначительную роль.

В данном разделе рассматривается вторая стадия процесса цементирования скважины после перекрытия потока разделительной пробкой, когда волновые явления играют главенствующую роль.

Схема заполнения скважины в момент посадки разделительной пробки на дно, представлена на рис.5.15. Движение жидкости в данной трубопроводной системе описывается системой уравнений (2.65) – (2.68) (см. раздел 2.6).

### 5.8.1. Граничные условия

Для верха скважины (дневная поверхность) задается подача для трубы и равенство атмосферному давлению на выходе из затрубного пространства. Учитывая что  $z(0)=0$  (нулевая отметка расположена на дневной поверхности),

$$V(0,t) = \frac{Q_n(t)}{\omega}, \quad h_\kappa = h_{\kappa,am} = \frac{P_{амм}}{\rho_\kappa g}. \quad (5.48)$$

Отсюда, используя формулы (2.91), получаем условия отражения инвариантов от дневной поверхности

$$\begin{aligned} r &= -\frac{a_\kappa + \eta\eta_\kappa a}{a_\kappa - \eta\eta_\kappa a} s + 2 \frac{a(1 - \eta\eta_\kappa)}{a_\kappa - \eta\eta_\kappa a} \frac{Q_n}{g\omega} a_\kappa - \frac{2\eta_\kappa a}{a_\kappa - \eta\eta_\kappa a} [s_\kappa + (1 - \eta\eta_\kappa)h_{\kappa,am}], \\ r_\kappa &= \frac{a_\kappa + \eta\eta_\kappa a}{a_\kappa - \eta\eta_\kappa a} s_\kappa + 2h_{\kappa,am} \frac{(1 - \eta\eta_\kappa)a_\kappa}{a_\kappa - \eta\eta_\kappa a} + \frac{2\eta a_\kappa}{a_\kappa - \eta\eta_\kappa a} \left[ s - \frac{Q_n(1 - \eta\eta_\kappa)a}{\omega g} \right]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

На дне скважины задаются граничные условия (условия непротекания) как для трубы, так и для затрубного пространства, в виде

$$V(L,t) = 0, \quad V_{\kappa}(L,t) = 0, \quad (5.50)$$

откуда, используя формулы (2.91), получаем условия отражения инвариантов

$$s = -r, \quad s_{\kappa} = -r_{\kappa}. \quad (5.51)$$

### 5.8.2. Методика расчета

Для расчетов используется прямоугольная разностная сетка с шагом  $\Delta t$  по времени и шагом  $\Delta x = L/N$  по длине, где  $L$  – длина трубопровода, а  $N$  – число шагов по длине.

Расчетная схема представлена на рис.5.16.

Пусть  $k$  – номер шага по времени и  $n$  – номер шага по длине,  $n=0, \dots, N$ , при этом  $n=0$  соответствует началу трубопровода, а  $n=N$  соответствует концу трубопровода.

Проинтегрировав уравнения (2.86) по соответствующей характеристике (2.90), получаем расчетные соотношения

$$\begin{aligned} \bar{r}_n &= r_n^{k+1} = (1 - \mu_1)r_n^k + \mu_1 r_{n-1}^k + \Delta t \cdot \langle F_1 \rangle && \text{для } n=1, \dots, N; \\ \bar{s}_n &= s_n^{k+1} = (1 - \mu_2)s_n^k + \mu_2 s_{n+1}^k + \Delta t \cdot \langle F_2 \rangle && \text{для } n=N-1, \dots, 0; \\ \bar{r}_{\kappa,n} &= r_{\kappa,n}^{k+1} = (1 - \mu_3)r_{\kappa,n}^k + \mu_3 r_{\kappa,n-1}^k + \Delta t \cdot \langle F_3 \rangle && \text{для } n=1, \dots, N; \\ \bar{s}_{\kappa,n} &= s_{\kappa,n}^{k+1} = (1 - \mu_4)s_{\kappa,n}^k + \mu_4 s_{\kappa,n+1}^k + \Delta t \cdot \langle F_4 \rangle && \text{для } n=N-1, \dots, 0; \end{aligned} \quad (5.52)$$

где  $\mu_i$  – коэффициенты Куранта

$$\mu_i = |\lambda_i| \Delta t / \Delta x, \quad i=1, \dots, 4. \quad (5.53)$$

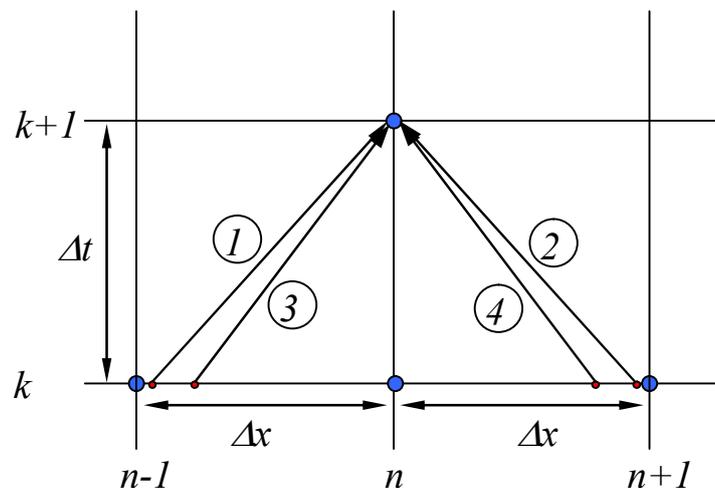


рис.5.16. Разностная сетка.

Здесь обозначение  $\langle F \rangle$  означает некоторое среднее значение  $F$  вдоль соответствующего участка интегрирования. В зависимости от выбора этого среднего будут получаться различные варианты расчетной схемы.

Требование устойчивости разностной схемы [137] налагает ограничение

$$\mu_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (5.54)$$

откуда следует ограничение на шаг сетки

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max_i \lambda_i} = \frac{\Delta x}{\max(a, a_k)}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (5.55)$$

Соотношения (5.52) позволяют вычислить значения на новом,  $k+1$ -ом шаге по времени для всех внутренних точек  $n=1, \dots, N-1$ .

Для граничных значений  $n=0$  и  $n=N$  используются по два соотношения из (5.52) и два граничных условия (для трубы и затрубного пространства).

### 5.8.3. Результаты расчетов.

Расчеты проводились при следующих исходных данных.

Данные по скважине и обсадной колонне:  $D = 0.3$ ;  $d = 0.2$ ;  $\delta = 0.01$ ;  $\delta/d \approx 0,01$ ;  $E_{ст} \approx 2,1 \times 10^{11}$  Па (сталь);  $E_R \approx 2,0 \times 10^{10}$  Па.

Данные по жидкости:  $E_{ж,к} \approx 2,0 \times 10^9$  Па;  $\rho \approx 1020$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_k \approx 1820$  кг/м<sup>3</sup> (цементный раствор);  $\rho_k \approx 1360$  кг/м<sup>3</sup> (буровой раствор).

Тогда имеем  $k_z \approx 0,5$ ;  $K_{вн} \approx 1,05 \times 10^{10}$ ;  $K_{нар} \approx 9,55 \times 10^9$ ;  $K_{скв} \approx 1,0 \times 10^{10}$ .

Расчет скоростей волны по Н.Е.Жуковскому даёт значения:

$$c = 1309,84 \text{ м/с}; \quad c_k = 827,016 \text{ м/с};$$

Коэффициенты взаимовлияния:

$$\varepsilon \approx 0,183333; \quad \varepsilon_k \approx 0,151724; \quad \varepsilon_k \varepsilon \approx 0,028; \quad 1 - \varepsilon_k \varepsilon \approx 0,972.$$

Скорости распространения малых возмущений в трубе и затрубном пространстве:  $a \approx 1340,29$  м/с;  $a_k \approx 819,709$ .

$$\eta \approx 0,137313; \quad \eta_k \approx -0,174279; \quad \eta \cdot \eta_k \approx -0,0239307.$$

Результаты расчетов представлены на рис.5.17 и рис.5.18.

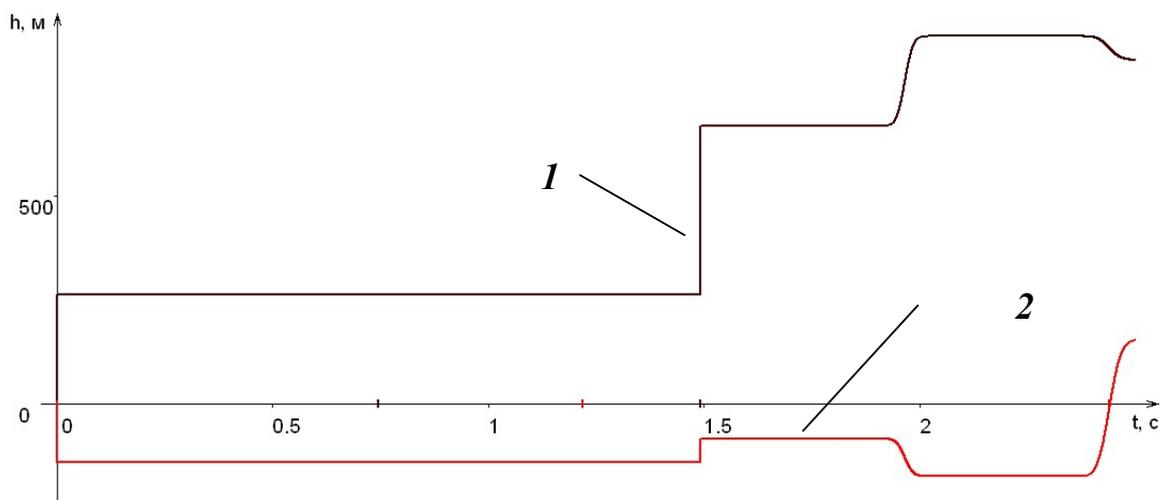


рис.5.17. Давления у разделительной пробки.

Здесь: 1 – давление в обсадной трубе; 2 – давление в затрубном пространстве.

На первом из них показаны графики поведения давления у разделительной пробки (на дне обсадной колонны) как в самой трубе (линия 1), так и в затрубном пространстве (линия 2). На полученных графиках отчетливо видны два всплеска давления, вызванные двумя возмущениями с различными скоростями распространения.

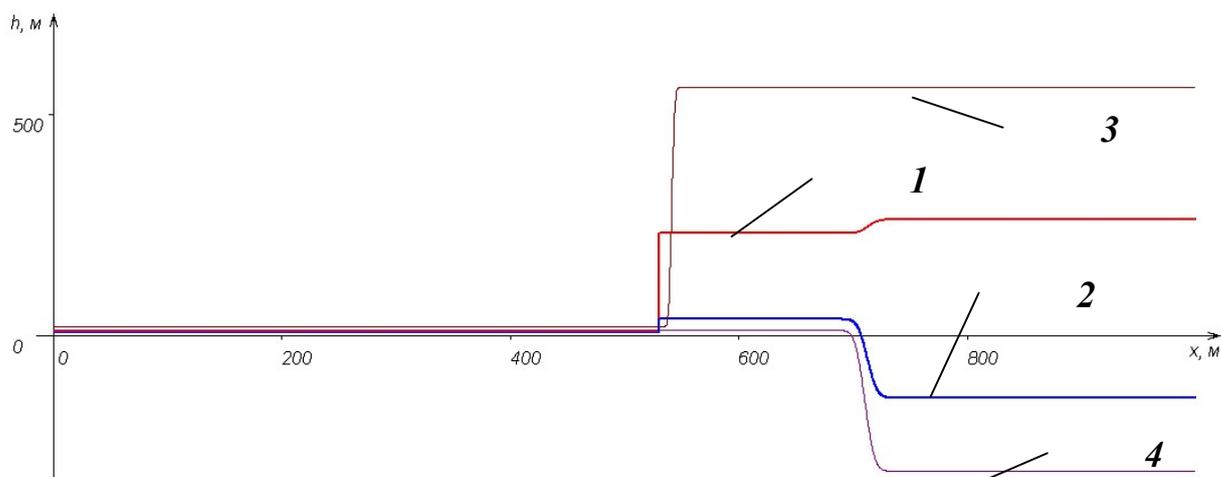


рис.5.18. Профили давления в момент времени 0, 35 сек.

Здесь: 1 – давление в обсадной трубе; 2 – давление в затрубном пространстве; 3 – давление гидравлического удара в обсадной трубе при отсутствии взаимовлияния; 4 – то же для затрубного пространства.

На рис.5.18 представлены мгновенные профили давлений по длине скважины для фиксированного момента времени. На рисунке также отчетливо видно, что за первым фронтом возмущения распространяется второй фронт с меньшей скоростью. Для сравнения на рисунке представлены результаты

расчета без взаимовлияния, т.е. при  $\varepsilon=0$  и  $\varepsilon_k=0$  (когда возмущения распространяются по трубам «независимо» друг от друга). В этом случае, во-первых, отсутствует второй всплеск возмущения (вторая волна), а во-вторых, значительно отличается амплитуда.

Отсюда видно, что гидравлический удар в системе коаксиальных труб имеет свою специфику, и наличие взаимовлияния через стенку сказывается весьма существенным.

## ГЛАВА 6. УПРОЩЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ГИДРОСИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

6.1. Процедуры декомпозиции и эквивалентирования больших трубопроводных систем как способы преодоления большой размерности системы.

Трубопроводные системы могут иметь большой объем и сложную структуру. Например, система технологических трубопроводов АЭС состоит из более чем 2000 труб и близкого количества узлов. Расчет нестационарных процессов в таких системах требует значительных вычислительных ресурсов. Поэтому задача снижения затрат вычислительных ресурсов является весьма актуальной.

С другой стороны, многие возникающие на практике задачи, например, задача оперативного управления, требуют быстрых вычислений и предсказания состояний системы в режиме реального времени. Хотя увеличение производительности вычислительной техники и усовершенствование вычислительных алгоритмов приводит к уменьшению времени счета, но более перспективным представляется разработка «быстрых» (упрощенных) моделей.

Рассматриваются два пути решения этой проблемы. Один состоит в прямой физической эквивалентизации, т.е. замене исходной системы более простой, но с эквивалентными (в некотором смысле) характеристиками. Задача состоит в разработке методики упрощения и "удаления" "малозначащих" частей системы с целью уменьшения объема вычислений с сохранением, тем не менее, основных характеристик исходной ("большой") системы..

Один из путей решения этой задачи основан на замене исходных систем с распределенными параметрами (СРП) на системы с сосредоточенными параметрами (ССП). При этом требуется подобрать характеристики новой системы так, чтобы параметры процесса в ней были как можно ближе к параметрам процесса в исходной системе.

Другой подход основан на декомпозиции исходной системы на отдельные части и моделировании ее «по частям» с использованием имитационного

моделирования. В этом случае исследуемая подсистема рассматривается как отдельная система, а остальная часть системы рассматривается как внешняя среда. Тогда, имитируя спектр внешний возмущений, во-первых, можно построить функцию отклика подсистемы; во-вторых, можно оценить вклад различных параметров подсистемы и отбросить малозначащие, что позволяет упростить рассматриваемую модель. Такой путь позволяет декомпозировать сложную задачу на несколько более простых задач, которые могут быть успешно решены.

## 6.2. Описание трубопровода моделью с сосредоточенными параметрами первого порядка

По принятой в настоящее время классификации [106, 144], узлы трубопроводной системы можно отнести к так называемым системам с сосредоточенными параметрами [94, 8], а трубы – к системам с распределенными параметрами [178, 106, 144].

Использование для труб моделей систем с сосредоточенными параметрами даёт существенную экономию вычислительных ресурсов.

Итак, будем по-прежнему считать, что течение в трубопроводе описывается уравнениями гидравлического удара (2.43) – (2.44) (индекс  $i$  для простоты опущен).

### 6.2.1. Блоки инерционности и упругости

Проинтегрировав по  $x$  умноженное на  $\omega/\rho a^2$  уравнение неразрывности (2.43) и применив теорему о среднем, получим

$$\frac{W}{K_e} \frac{dp_*}{dt} = Q_0 - Q_L, \quad (6.1)$$

где  $p_*$  – среднее по длине трубопровода давление,  $Q_L$  – расход в конце трубопровода ( $x=L$ ),  $Q_0$  – расход в начале трубопровода ( $x=0$ ),  $W = \int_0^L \omega(x) dx$  – объем жидкости в трубопроводе,  $K_e = \rho a^2$  – приведенный модуль объемного сжатия данного участка трубопровода, учитывающий упругость жидкости и

стенок трубопровода. Например, для тонкостенного трубопровода круглого сечения можно принять

$$K_e = \frac{E_{ж}}{1 + \frac{2R}{\delta} \frac{E_{ж}}{E}}, \quad (6.2)$$

где  $E_{ж}$  – объёмный модуль упругости жидкости;  $E$  – модуль упругости материала стенок трубы;  $R$  – радиус трубы;  $\delta$  – толщина стенок трубы; индекс  $i$  (номер трубы) для простоты опущен.

В том случае, когда перепадом давления по длине трубопровода можно пренебречь, полагая давление в каждой точке трубопровода равным  $p_*(t)$ , процесс изменения этого давления во времени описывается уравнением (6.1), а описываемый таким образом участок гидросистемы можно назвать блоком упругости.

Учитывая известную аналогию между описанием течения электрического тока по проводникам и течением жидкости в трубе, при которой расход аналогичен току, а давление - напряжению, можно коэффициент

$$C_H = W/K_e \quad (6.3)$$

трактовать как "гидравлическую емкость" данного участка гидросистемы (аналогично электрической емкости).

Проинтегрировав по  $x$  разделенное на  $\omega/\rho$  уравнение (2.44) и применив теорему о среднем, получим

$$\frac{\rho L}{\omega_*} \frac{dQ_*}{dt} = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \rho L \frac{\lambda |Q|Q}{2d_* \omega_*^2}, \quad (6.4)$$

где  $Q_*$  – средний по длине трубопровода расход,  $p_L$  и  $z_L$  – давление и отметка в конце трубопровода ( $x=L$ ),  $p_0$  и  $z_0$  – давление и отметка в начале трубопровода ( $x=0$ ),  $\omega_*$ ,  $d_*$  – средние по длине значения площади поперечного сечения и диаметра трубопровода, соответственно;  $\lambda |Q|Q$  – среднее по длине значение составляющих члена трения.

Средние величины в формулах (6.1) и (6.4) понимаются как

$$p_* = \frac{1}{L} \int_0^L p(x,t) dx, \quad Q_* = \frac{1}{L} \int_0^L Q(x,t) dx, \quad \overline{\lambda|Q|Q} = \frac{1}{L} \int_0^L \lambda|Q|Q dx. \quad (6.5)$$

В формуле (6.4) последнее слагаемое можно представить в виде  $\rho L a_{fr}$ , где величина  $a_{fr}$  имеет размерность ускорения и представляет собой среднее ускорение силы трения

$$a_{fr} = \frac{\overline{\lambda|Q|Q}}{2d\omega^2} \quad (6.6)$$

Зависимость (6.4) учитывает инерционные свойства жидкости (уравнение Бернулли с инерционным членом, где в правой части зависимости (6.4) первое слагаемое отвечает за действие сил давления, второе - за силы тяжести, третье - за силы трения), и в том случае, когда сжимаемостью можно пренебречь, полагая расход жидкости в каждой точке трубопровода равным  $Q_*(t)$ ; описываемый таким образом участок гидросистемы можно назвать блоком инерционности. Учитывая вышеупомянутую электро-гидравлическую аналогию, можно заметить, что уравнение (6.4) полностью аналогично закону Ома, на основании чего коэффициент

$$L_H = \rho L / \omega \quad (6.7)$$

можно трактовать как "гидравлическую индуктивность".

Таким образом, имеем два блока - две интегральных модели, одна из которых – уравнение (6.1) – описывает упругие свойства системы, а другая – уравнение (6.4) – инерционные. Упрощение описания переходных процессов в гидросистеме и состоит в переходе от основной модели (2.43) – (2.44), представляющей собой систему уравнений в частных производных, описывающих поведение системы с распределенными параметрами, к комбинации уравнений (6.1), (6.4), представляющих собой проинтегрированные по отдельным участкам гидросистемы уравнения (2.43) и (2.44) – блоки упругости и инерционности, описывающие поведение гидросистемы в рамках системы уравнений с сосредоточенными параметрами. И провести такой переход можно далеко не однозначно.

### 6.2.2. Способы комбинации блоков

#### а) Параллельное соединение.

Самой простой схемой (схемой с минимальным числом параметров) является схема моделирования, представленная на рис.6.1, когда интегрирование уравнений (2.43) и (2.44) производится по всей длине каждого участка рассматриваемой гидросистемы.

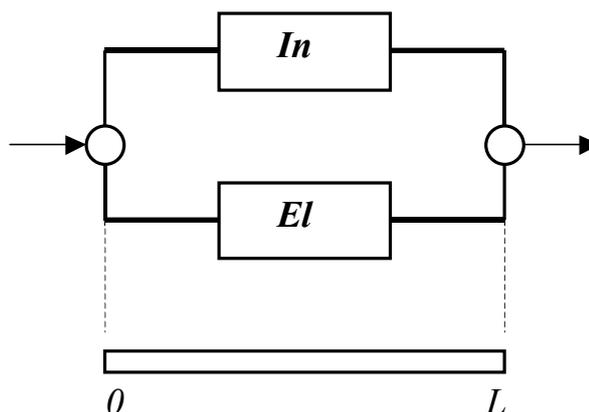


рис.6.1. Простое параллельное соединение блоков. Здесь  $In$  - инерционный блок,  $El$  - блок упругости.

При таком «соединении» имеем систему уравнений

$$C_H \frac{dp_*}{dt} = Q_0 - Q_L, \quad (6.8)$$

$$L_H \frac{dQ_*}{dt} = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \rho L \frac{\lambda |Q|Q}{2d\omega^2} = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \rho S \overline{|Q|Q}, \quad (6.9)$$

где  $S$  – сопротивление трубопровода,

$$S = \lambda \frac{L}{d} \frac{1}{2\omega^2}. \quad (6.10)$$

Для замыкания системы необходимо задать связь между средними параметрами  $p_*$  и  $Q_*$  и крайними значениями  $p_0, p_L, Q_0, Q_L$ , например, в виде:

$$p_* \approx \alpha_0 p_0 + \alpha_L p_L, \quad (6.11)$$

$$Q_* \approx \beta_0 Q_0 + \beta_L Q_L, \quad (6.12)$$

$$\lambda |Q|Q \approx \gamma_0 \lambda_0 |Q_0|Q_0 + \gamma_L \lambda_L |Q_L|Q_L, \quad (6.13)$$

где  $\alpha_0, \alpha_L, \beta_0, \beta_L, \gamma_0, \gamma_L$  – весовые коэффициенты:

$$\alpha_0 \geq 0, \alpha_L \geq 0, \alpha_0 + \alpha_L = 1, \quad (6.14)$$

$$\beta_0 \geq 0, \beta_L \geq 0, \beta_0 + \beta_L = 1, \quad (6.15)$$

$$\gamma_0 \geq 0, \gamma_L \geq 0, \gamma_0 + \gamma_L = 1. \quad (6.16)$$

Тогда система уравнений, описывающее течение жидкости в трубопроводе, будет иметь вид

$$\alpha_0 C_H \frac{dp_0}{dt} + \alpha_L C_H \frac{dp_L}{dt} = Q_0 - Q_L, \quad (6.17)$$

$$\beta_0 L_H \frac{dQ_0}{dt} + \beta_L L_H \frac{dQ_L}{dt} = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \frac{C_H}{2d\omega} (\gamma_0 \lambda_0 |Q_0|Q_0 + \gamma_L \lambda_L |Q_L|Q_L) \quad (6.18)$$

При выборе коэффициентов

$$\alpha_0 = 1/2, \alpha_L = 1/2, \beta_0 = 1/2, \beta_L = 1/2, \gamma_0 = 1/2, \gamma_L = 1/2 \quad (6.19)$$

имеем аппроксимацию средних величин по формуле трапеций

$$\frac{C_H}{2} \left( \frac{dp_0}{dt} + \frac{dp_L}{dt} \right) = Q_0 - Q_L, \quad (6.20)$$

$$\frac{L_H}{2} \left( \frac{dQ_0}{dt} + \frac{dQ_L}{dt} \right) = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \frac{L_H}{4d\omega} (\lambda_0 |Q_0|Q_0 + \lambda_L |Q_L|Q_L). \quad (6.21)$$

б) Последовательное соединение

Схема моделирования представлена на рис.6.2.

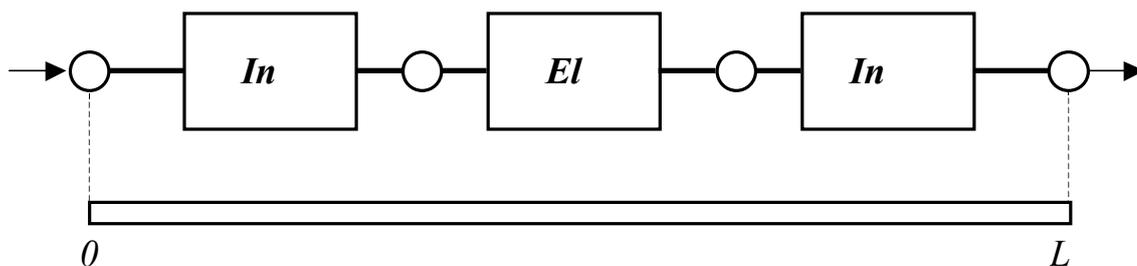


рис.6.2.

Этой схеме соответствует система уравнений

$$\alpha_0 L_H \frac{dQ_{0,*}}{dt} = p_0 - p_* - \rho g(z_* - z_0) - \rho \alpha_0 L \frac{\langle \lambda |Q|Q \rangle_{0,*}}{2d\omega^2},$$

$$C_H \frac{dp_*}{dt} = Q_{0,*} - Q_{L,*},$$

$$\alpha_L L_H \frac{dQ_{L,*}}{dt} = p_* - p_L - \rho g(z_L - z_*) - \rho \alpha_L L \frac{\langle \lambda |Q|Q \rangle_{L,*}}{2d\omega^2}.$$

Для замыкания системы необходимо задать связь между средними параметрами  $Q_{0,*}$ ,  $Q_{L,*}$ , и  $p_*$  и крайевыми значениями  $p_0$ ,  $p_L$ ,  $Q_0$ ,  $Q_L$ . В работе [188] была предложена следующая схема замещения:

$$\begin{aligned} Q_{0,*} &\approx Q_0, \\ Q_{L,*} &\approx Q_L, \\ \langle \lambda | Q | Q \rangle_{0,*} &\approx \lambda_0 | Q_0 | Q_0, \\ \langle \lambda | Q | Q \rangle_{L,*} &\approx \lambda_L | Q_L | Q_L, \end{aligned}$$

которая порождает следующую систему уравнений

$$\alpha_0 L_H \frac{dQ_0}{dt} = p_0 - p_* - \rho g(z_* - z_0) - \rho \alpha_0 L \frac{\lambda_0 | Q_0 | Q_0}{2d\omega^2}, \quad (6.22)$$

$$C_H \frac{dp_*}{dt} = Q_0 - Q_L, \quad (6.23)$$

$$\alpha_L L_H \frac{dQ_L}{dt} = p_* - p_L - \rho g(z_L - z_*) - \rho \alpha_L L \frac{\lambda_L | Q_L | Q_L}{2d\omega^2}. \quad (6.24)$$

Фактически здесь произведена замена участка реального трубопровода тремя фрагментами: двумя участками неупругого трубопровода, заполненного несжимаемой жидкостью (инерционные блоки), соединенными с помощью «водяного колпака», аппроксимирующего упругие свойства всего трубопровода (блок упругости). Этой схеме соответствует физическая модель, представленная на рис. 6.3, б).

При такой аппроксимации имеет место универсальность представления любой сколь угодно сложной гидросистемы, т.к. основные уравнения заменяются вышеназванными тремя блоками (динамические процессы на рассматриваемом  $i$ -том участке трубопровода при этом описываются тремя параметрами:  $Q_l(t)$ ,  $Q_r(t)$  - расходами на левом и на правом участке трубопровода и  $p(t)$  - давлением в «водяном колпаке»), а крайевые условия, отражающие работу управляющих органов, а также внешние воздействия на гидросистему, описываются согласно разделу 3.

Кроме того, в рамках такой схематизации к описанию динамических процессов в произвольной гидросистеме применима модернизированная

(учитывающая инерционную составляющую перепада давлений и наличие в вершинах водяных и воздушных колпаков, компенсаторов и т.п.) теория гидравлических цепей (ТГЦ) [110, 20].

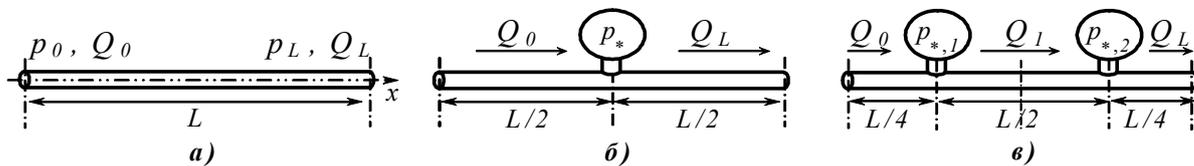


рис.6.3

Заметим, что предложенный в работах [67, 206767] подход к описанию нестационарных процессов в трубопроводных системах верно учитывает лишь динамические свойства потока в виде уравнения Бернулли с инерционным слагаемым, в то время как упругие свойства гидросистемы учитываются неверно.

#### в) Сложные соединения

Можно рассматривать и более сложные виды соединения, как, например, представленное на рис.6.4, которому может соответствовать физическая схема, изображенная на рис. 6.3, в).

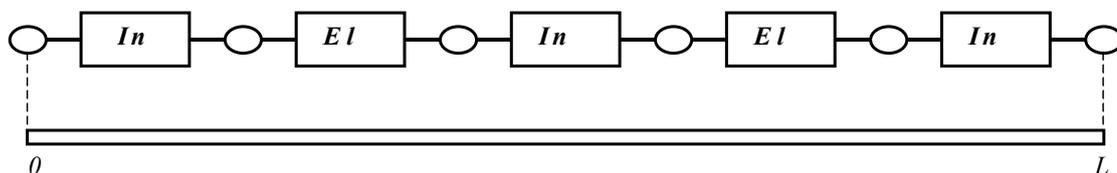


рис.6.4

Для схемы соединения блоков, представленной на рис.6.4, имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 L_H \frac{dQ_0}{dt} &= p_0 - p_{*,1} - \rho g(z_{*,1} - z_0) - \rho \alpha_0 L \frac{\lambda_0 |Q_0| Q_0}{2d\omega^2} = 0, \\
 \frac{C_H}{2} \frac{dp_{*,1}}{dt} &= Q_0 - Q_1, \\
 \alpha_1 L_H \frac{dQ_1}{dt} &= p_{*,1} - p_{*,2} - \rho g(z_{*,2} - z_{*,1}) - \rho \alpha_1 L \frac{\lambda_1 |Q_1| Q_1}{2d\omega^2} = 0, \\
 \frac{C_H}{2} \frac{dp_{*,2}}{dt} &= Q_1 - Q_L, \\
 \alpha_L L_H \frac{dQ_L}{dt} &= p_{*,2} - p_L - \rho g(z_L - z_{*,2}) - \rho \alpha_L L \frac{\lambda_L |Q_L| Q_L}{2d\omega^2} = 0
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

с  $\alpha_0 = 1/4$ ,  $\alpha_1 = 1/2$ ,  $\alpha_L = 1/4$ .

Моделирование системами такого рода для произвольного числа звеньев рассмотрено подробно в работе А.А.Атавина и автора [188]. При этом показано, что с увеличением числа звеньев точность модели такого типа возрастает, а решение приближается к решению модели с распределенными параметрами (см. рис.6.5).

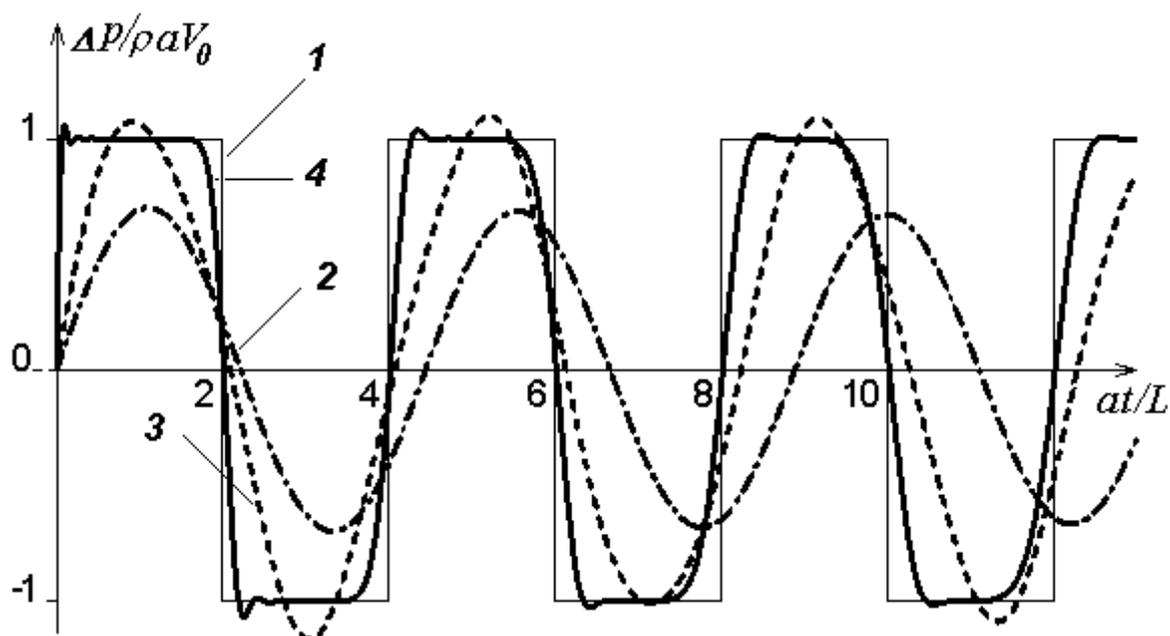


рис.6.5. Повышение точности расчета с ростом числа звеньев.

1 – точное решение; 2 – один «колпак» (рис. 6.3, б); 3 – 2 колпака (рис. 6.3, в);  
4 – 20 звеньев («колпаков»).

### 6.3. Модель второго порядка

Как показали численные эксперименты, использование приближения первого порядка (6.11) – (6.13) для оценки средних величин, например, использование формулы трапеций (6.19), зачастую даёт неудовлетворительный результат.

Вместо аппроксимации средних величин  $p_*$  и  $Q_*$  по формуле трапеций, можно использовать более точную формулу аппроксимации [95], обобщающую формулу трапеций:

$$p_* = \frac{1}{L} \int_0^L p(x,t) dx \approx \frac{p_0 + p_L}{2} + \frac{L}{12} (p'_0 - p'_L), \quad (6.26)$$

$$Q_* = \frac{1}{L} \int_0^L Q(x,t) dx \approx \frac{Q_0 + Q_L}{2} + \frac{L}{12} (Q'_0 - Q'_L), \quad (6.27)$$

где

$$p'_0 = \frac{\partial p}{\partial x}(0,t), \quad p'_L = \frac{\partial p}{\partial x}(L,t), \quad Q'_0 = \frac{\partial Q}{\partial x}(0,t), \quad Q'_L = \frac{\partial Q}{\partial x}(L,t). \quad (6.28)$$

На возможность использования аппроксимации такого вида впервые обратил внимание М.Г.Сухарев в работе [171].

Записывая уравнения (2.43) – (2.44) на границах  $x=0$  и  $x=L$  и выражая пространственные производные через производные по времени, получаем:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dp_0}{dt} + \frac{dp_L}{dt} \right) - \frac{\rho L}{12\omega} \left( \frac{d^2 Q_0}{dt^2} - \frac{d^2 Q_L}{dt^2} \right) - \frac{\rho L}{24d\omega^2} \left( R_0 \frac{dQ_0}{dt} - R_L \frac{dQ_L}{dt} \right) = \frac{\rho a^2}{\omega L} (Q_0 - Q_L), \quad (6.29)$$

$$\frac{\rho L}{2\omega} \left( \frac{dQ_0}{dt} + \frac{dQ_L}{dt} \right) - \frac{L^2}{12a^2} \left( \frac{d^2 p_0}{dt^2} - \frac{d^2 p_L}{dt^2} \right) = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \rho L \frac{\lambda |Q| \overline{Q}}{2d\omega^2}, \quad (6.30)$$

или

$$\frac{C_H}{2} \left( \frac{dp_0}{dt} + \frac{dp_L}{dt} \right) - \frac{C_H L_H}{12} \left( \frac{d^2 Q_0}{dt^2} - \frac{d^2 Q_L}{dt^2} \right) - \frac{C_H L_H}{24d\omega} \left( R_0 \frac{dQ_0}{dt} - R_L \frac{dQ_L}{dt} \right) = Q_0 - Q_L, \quad (6.31)$$

$$\frac{L_H}{2} \left( \frac{dQ_0}{dt} + \frac{dQ_L}{dt} \right) - \frac{C_H L_H}{12} \left( \frac{d^2 p_0}{dt^2} - \frac{d^2 p_L}{dt^2} \right) = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \rho L \frac{\lambda |Q| \overline{Q}}{2d\omega^2}, \quad (6.32)$$

где

$$R = \left( 2\lambda + \frac{d\lambda}{dQ} Q \right) |Q|. \quad (6.33)$$

Отметим, что аналогично случаю колебательного контура в электротехнике [66, 79], величина  $\sqrt{C_H L_H}$  имеет размерность времени и представляет собой полупериод гидравлического удара

$$\sqrt{C_H L_H} = L/a = T. \quad (6.34)$$

Продолжая аналогию, величину  $\sqrt{L_H/C_H}$  назовем волновым сопротивлением:

$$\sqrt{L_H/C_H} = \rho a / \omega. \quad (6.35)$$

Если удалить в (6.31) – (6.32) все слагаемые со множителем  $C_H L_H$ , модель (6.31) – (6.32) превращается в (6.17) – (6.18) с коэффициентами, соответствующими формуле трапеций (6.19).

Последнее слагаемое в левой части (6.29) (или (6.31)) является нелинейным. Это единственная нелинейность в дифференциальной части уравнений (6.29) – (6.30). Отметим, что исходные уравнения гидравлического удара (2.43) – (2.44) не содержат нелинейностей в дифференциальной части. Эта нелинейность возникла при проведении дополнительного дифференцирования и является в какой-то мере искусственной. В случае течений без трения эта нелинейность исчезает. Поэтому не будет большой ошибкой, если в уравнении (6.29) (и, соответственно в (6.31)) последнее нелинейное слагаемое в левой части будет отброшено. Таким образом, получается следующая, упрощенная, система уравнений:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dp_0}{dt} + \frac{dp_L}{dt} \right) - \frac{\rho L}{12\omega} \left( \frac{d^2 Q_0}{dt^2} - \frac{d^2 Q_L}{dt^2} \right) = \frac{\rho a^2}{\omega L} (Q_0 - Q_L), \quad (6.36)$$

$$\frac{\rho L}{2\omega} \left( \frac{dQ_0}{dt} + \frac{dQ_L}{dt} \right) - \frac{L^2}{12a^2} \left( \frac{d^2 p_0}{dt^2} - \frac{d^2 p_L}{dt^2} \right) = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \rho L \frac{\lambda |Q| Q}{2d\omega^2}, \quad (6.37)$$

или

$$\frac{C_H}{2} \left( \frac{dp_0}{dt} + \frac{dp_L}{dt} \right) - \frac{C_H L_H}{12} \left( \frac{d^2 Q_0}{dt^2} - \frac{d^2 Q_L}{dt^2} \right) = Q_0 - Q_L, \quad (6.38)$$

$$\frac{L_H}{2} \left( \frac{dQ_0}{dt} + \frac{dQ_L}{dt} \right) - \frac{C_H L_H}{12} \left( \frac{d^2 p_0}{dt^2} - \frac{d^2 p_L}{dt^2} \right) = p_0 - p_L - \rho g(z_L - z_0) - \rho L \frac{\lambda |Q| Q}{2d\omega^2}. \quad (6.39)$$

Сопоставление результатов расчета по этой упрощенной модели с расчетами по полной модели, проведенное ниже, показывает незначительное расхождение, вполне допустимое в большинстве практических случаев.

#### 6.4. Тестирование моделей с сосредоточенными параметрами

Предложенные схемы тестировались на следующих модельных задачах.

- а) Гидравлический удар в простом трубопроводе (рис.6.6 – рис.6.7) с заданным постоянным давлением в начале трубопровода (мгновенное и постепенное закрытие задвижки, прямой и непрямой удар, с учетом и без учета сил трения);
- б) Гидравлический удар в простом трубопроводе с насосом в начале трубопровода (аналогичные случаи);
- в) Задача об истечении.



рис.6.6.

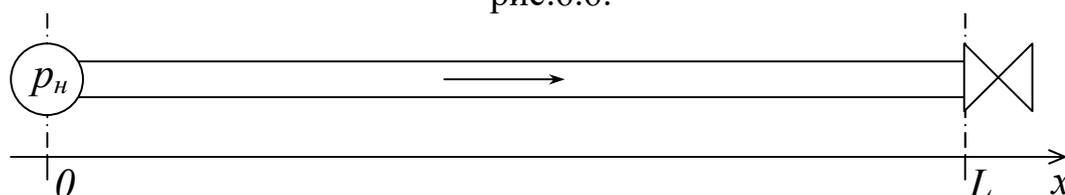


рис.6.7. Простой трубопровод.

Ниже рассмотрены результаты расчетов этих тестовых задач по различным схемам.

#### 6.4.1. Гидравлический удар в простом трубопроводе

Рассмотрим сначала случай без трения в горизонтальном простом трубопроводе (рис.6.6). Допустим, на левом конце трубопровода задано постоянное давление  $p_n = \rho g H$ , а на правом задан закон закрытия задвижки в виде

$$Q(L,t) = Q_L(t) = Q_n f(t), \quad (6.40)$$

где  $Q_n$  – начальное значение расхода;  $f(t)$  – монотонно убывающая функция, характеризующая закон закрытия задвижки:  $f(t) = 1$  при  $t \leq 0$ ,  $f(t) = 0$  при  $t > t_3$  и  $f(t)$  непрерывно убывает от 1 до 0 при  $t$ , меняющемся от 0 до  $t_3$ .

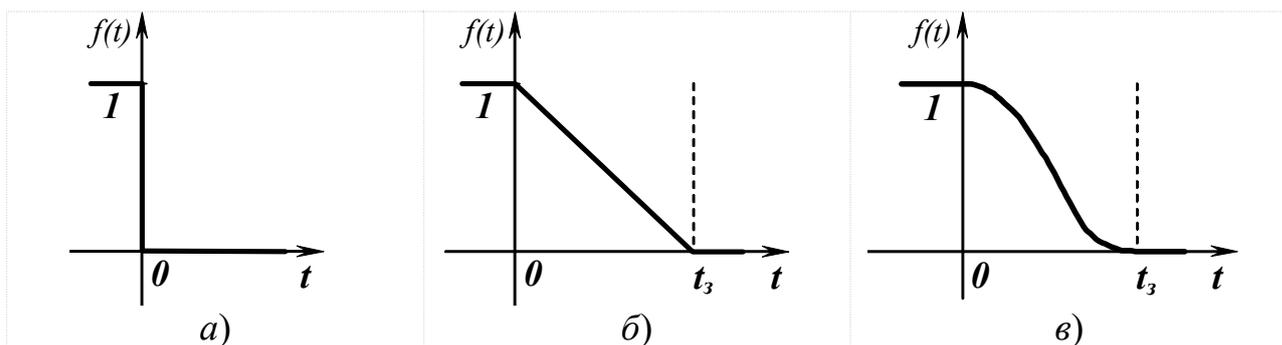


рис.6.8 Различные законы закрытия задвижки:  
*a* – мгновенное закрытие ( $t_3=0$ ); *b* – линейное закрытие;  
*в* – гладкое закрытие.

Здесь  $t_3$  – время закрытия задвижки,  $t = 0$  соответствует началу нестационарного процесса (закрытие задвижки).

Расчеты проводились для законов закрытия задвижки, представленных на рис.6.8, в частности, для линейного закона закрытия задвижки (рис.6.8, *b*):

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leq 0; \\ 1 - t/t_3, & \text{при } 0 < t < t_3; \\ 0, & \text{при } t_3 \leq t; \end{cases} \quad (6.41)$$

и для гладкого закона закрытия (рис.6.8, *в*):

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leq 0; \\ \frac{1 + \cos(\pi t/t_3)}{2}, & \text{при } 0 < t < t_3; \\ 0, & \text{при } t_3 \leq t. \end{cases} \quad (6.42)$$

Отметим, что мгновенное закрытие (рис.6.8, *a*) является предельным случаем для (6.41) и (6.42) при  $t_3 \rightarrow 0$ .

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) заданы постоянные давление и расход:

$$p_L(0) = p_n - \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho |Q_n| Q_n}{2\omega^2}, \quad Q_0(0) = Q_n. \quad (6.43)$$

Рассмотрим случай  $\lambda = 0$ .

В этом случае рассматриваемая задача имеет аналитическое периодическое решение, определяемое формулой Н.Е. Жуковского:

$$p_L(t) = \begin{cases} p_n + \frac{\rho a}{\omega} Q_n & , \text{ при } 2T(k-1) \leq t < 2Tk, \text{ где } k=1,3,5,\dots; \\ p_n - \frac{\rho a}{\omega} Q_n & , \text{ при } 2T(k-1) \leq t < 2Tk, \text{ где } k=2,4,6,\dots; \end{cases} \quad (6.44)$$

и

$$Q_0(t) = \begin{cases} Q_n & , \text{ при } 2T(k-1/2) \leq t < 2T(k+1/2), \text{ где } k = 0,2,4,\dots; \\ -Q_n & , \text{ при } 2T(k-1/2) \leq t < 2T(k+1/2), \text{ где } k = 1,3,5,\dots \end{cases} \quad (6.45)$$

Модель с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) с начальными данными (6.43) при выполнении граничных условий имеет решение вида

$$p_L(t) = p_n + \frac{\rho a}{\omega} \sqrt{\frac{\beta_0}{\alpha_L}} Q_n \sin \frac{t}{T\sqrt{\alpha_L\beta_0}}, \quad Q_0(t) = Q_n \cos \frac{t}{T\sqrt{\alpha_L\beta_0}}, \quad (6.46)$$

откуда видно, что для выполнения совпадения с точным решением (6.44) – (6.45) по частоте и максимальной амплитуде необходимо, чтобы

$$\alpha_L = \beta_0 = 2/\pi \approx 0,6366, \quad \alpha_0 = \beta_L = 1 - 2/\pi \approx 0,3634. \quad (6.47)$$

Формула трапеций (6.20) – (6.21), при выборе весовых коэффициентов (6.19), также обеспечивает совпадение с точным решением по максимальной амплитуде, но дает искажение по частоте.

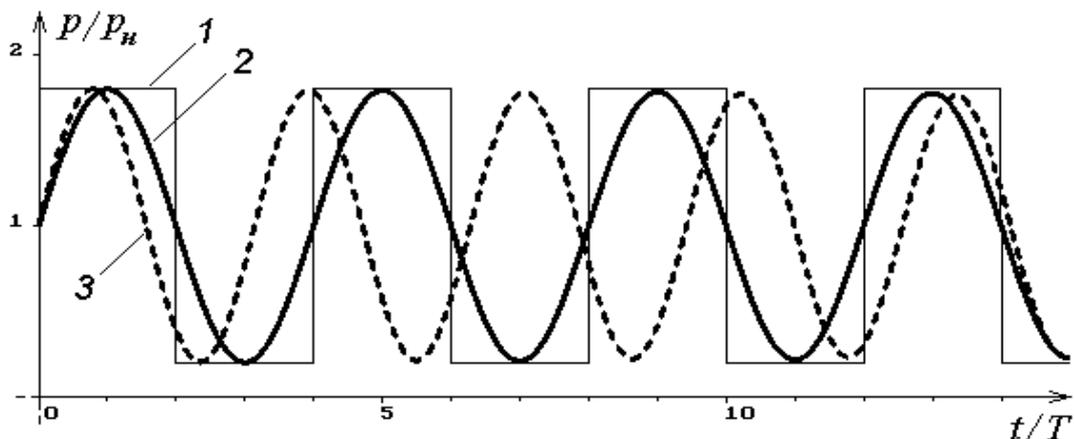


рис.6.9 Среднее давление при  $\lambda=0$ .

- 1 – точное решение (по модели с распределенными параметрами);
- 2 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «специальном» выборе весовых коэффициентов (6.47);
- 3 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «симметричных» весовых коэффициентах (6.19).

Результаты вычислений по этим моделям представлены на рис.6.9.

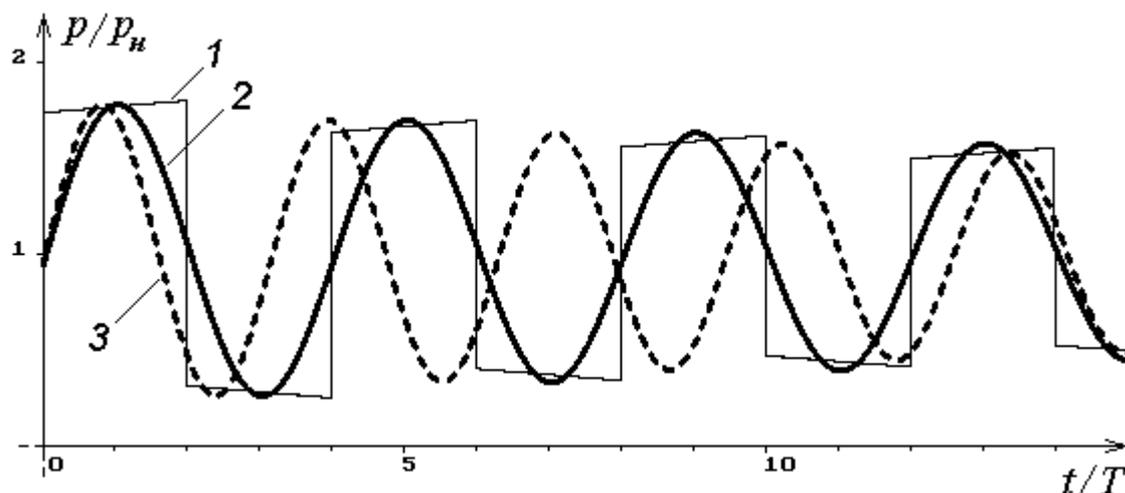


рис.6.10. Среднее давление при  $\lambda \neq 0$ .  
Обозначения те же, что и на рис.6.9.

Учет влияния трения сохраняет эту закономерность (см. рис.6.10).

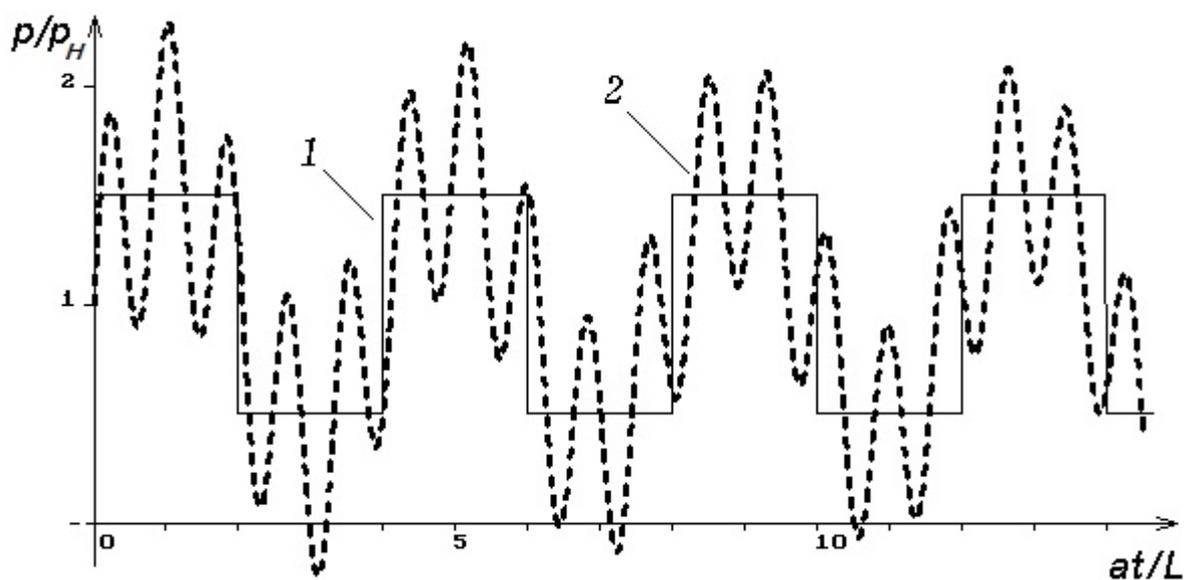


рис.6.11 Давление у задвижки в простом трубопроводе  
при гидравлическом ударе. 1. – точное решение;  
2 – решение по формулам второго порядка (6.31) – (6.32).

Рассмотрим теперь модель второго порядка (6.31) – (6.32) с одинаковыми весовыми коэффициентами, равными 0,5.

Решение этой системы уравнений представляет собой сумму гармоник с частотами

$$\omega_1 = \frac{1}{T} \sqrt{6(5 - \sqrt{21})} \approx \frac{1,0075\pi}{2T}, \quad \omega_2 = \frac{1}{T} \sqrt{6(5 + \sqrt{21})} \approx \frac{4,8272\pi}{2T} \approx 4,8\omega_1, \quad (6.48)$$

откуда видно, что более низкая («несущая») частота  $\omega_1$  практически совпадает с частотой гидравлического удара  $\pi/2T$ .

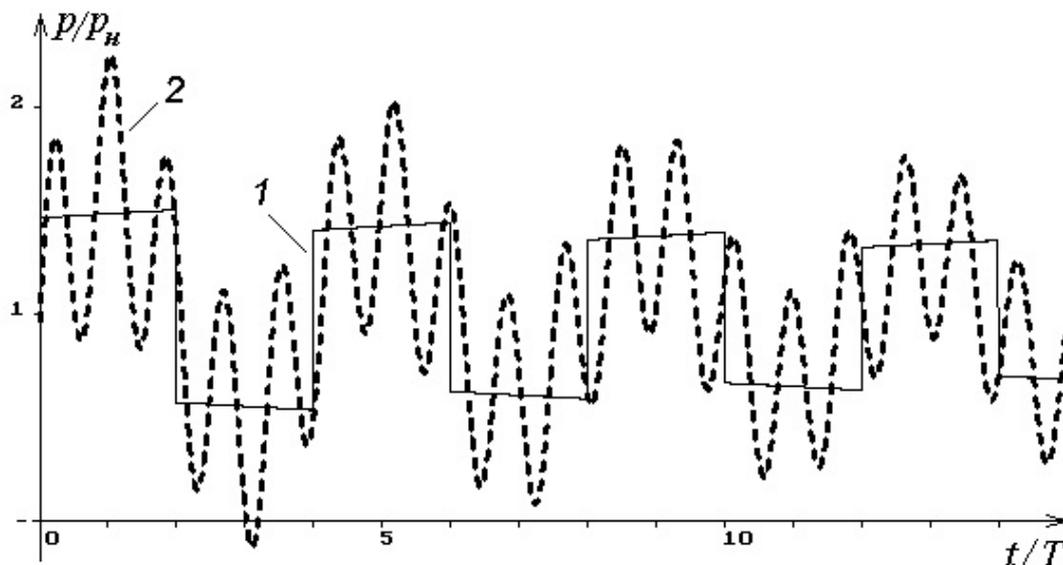


рис.6.12 Гидравлический удар в простом трубопроводе при  $\lambda \neq 0$ .

1. – решение на ЭВМ «полной» задачи;  
2 – решение по формулам второго порядка (6.31) – (6.32).

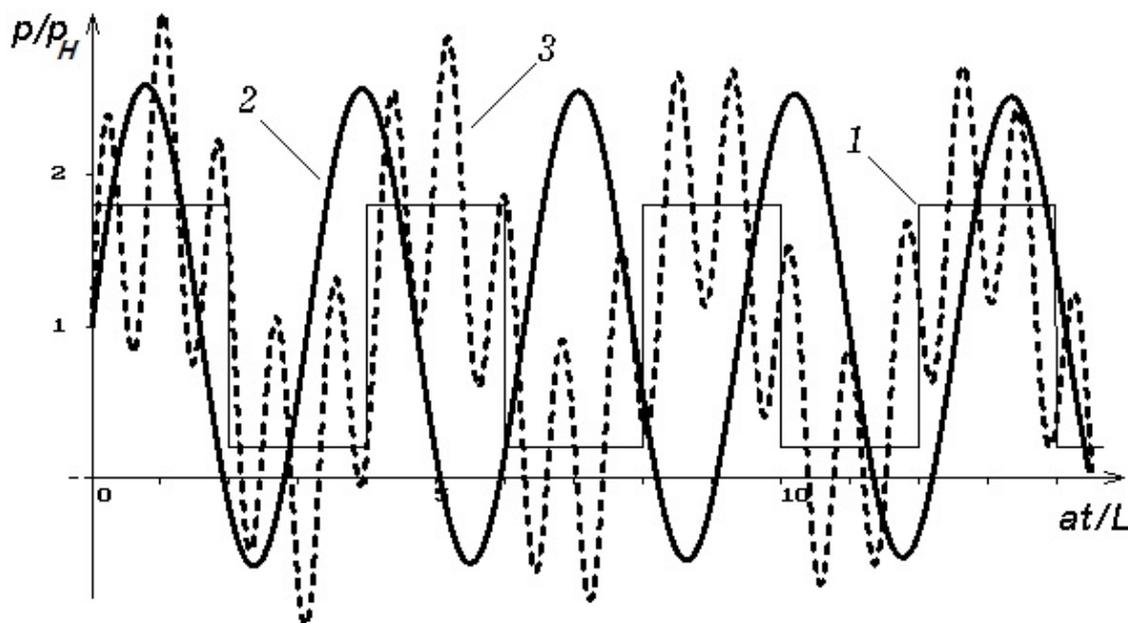


рис.6.13. Гидравлический удар в простом трубопроводе при  $\lambda = 0$ .

- 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «симметричных» весовых коэффициентах (6.19); 3 – расчет по модели 2-го порядка с сосредоточенными параметрами (6.31) – (6.32).

Результаты расчетов подтверждают этот факт (рис.6.11). На графиках видно, что процесс колебаний представляет собой сумму двух синусоид, где на основную низкочастотную составляющую с частотой  $\omega_1$  накладываются более высокочастотные колебания с частотой  $\omega_2$ . При этом обеспечивается почти полное совпадение с точным решением по частоте, и в среднем (интегральное) – по амплитуде.

Влияние трения постепенно уменьшает амплитуду, но общая картина процесса сохраняется (см. рис.6.12).

На рис.6.13 представлено сопоставление формул 1-го и 2-го порядка при одинаковом выборе весовых коэффициентов (6.19).

#### 6.4.2 Влияние времени и закона закрытия задвижки.

На рисунках ниже приведены графики поведения давления у задвижки для прямого гидравлического удара ( $t_3 < 2T$ ) при различных временах закрытия  $t_3$  по линейному закону (6.41).

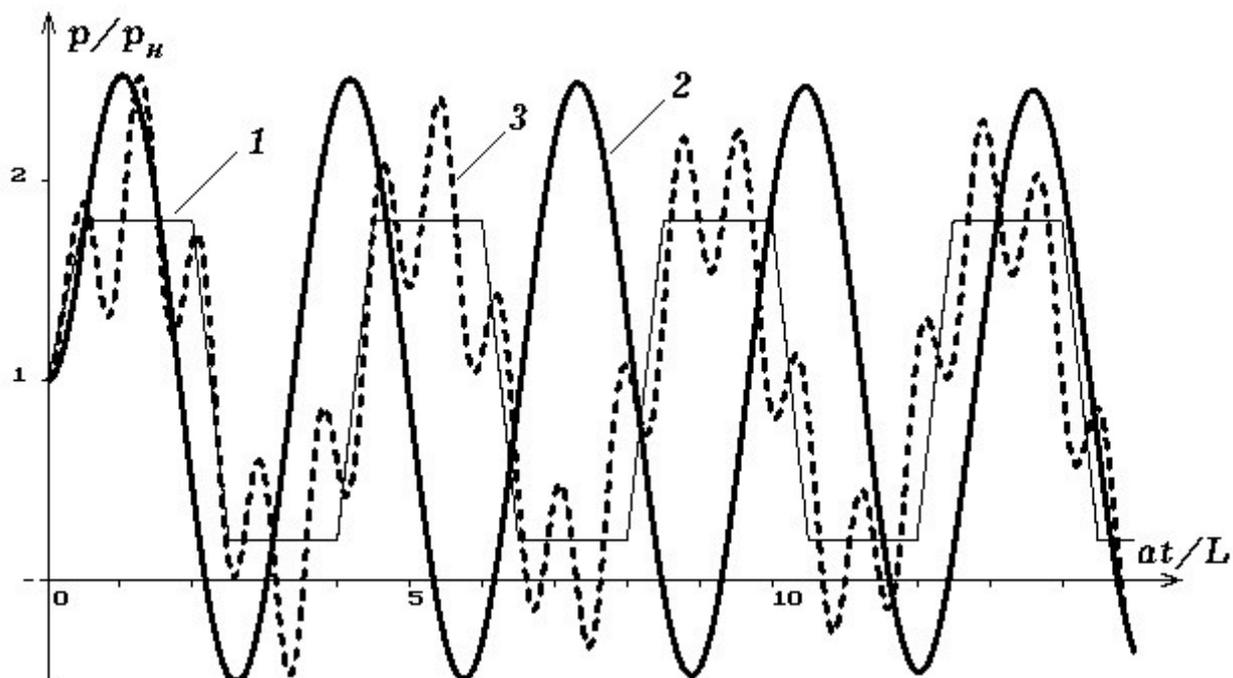


рис.6.14 Давление у задвижки при  $t_3/T = 0,5$  (линейное закрытие).  
 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

Из рисунков видно, что даже при относительно быстром закрытии задвижки ( $t_3 = 0,5T$ ) модель 2-го порядка (6.29) – (6.30) дает хорошее совпадение по частоте и в среднем – по амплитуде, имея завышенные пиковые значения по сравнению с точным решением. При увеличении времени закрытия задвижки форма кривой, рассчитанной по упрощенной модели 2-го порядка быстро приближается к точному решению, и при  $t_3 = 1,5T$  отклонение не только в среднем, но и по максимуму становится незначительным (рис.6.16).

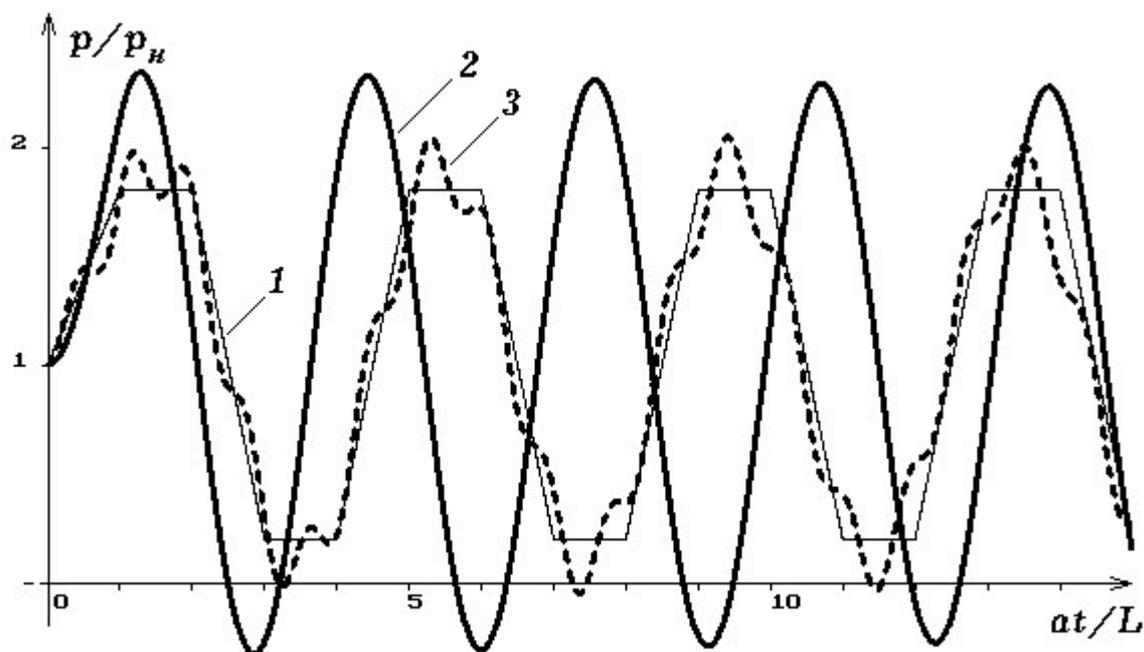


рис.6.15 Давление у задвижки при  $t_3/T = 1,0$  (линейное закрытие).  
 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

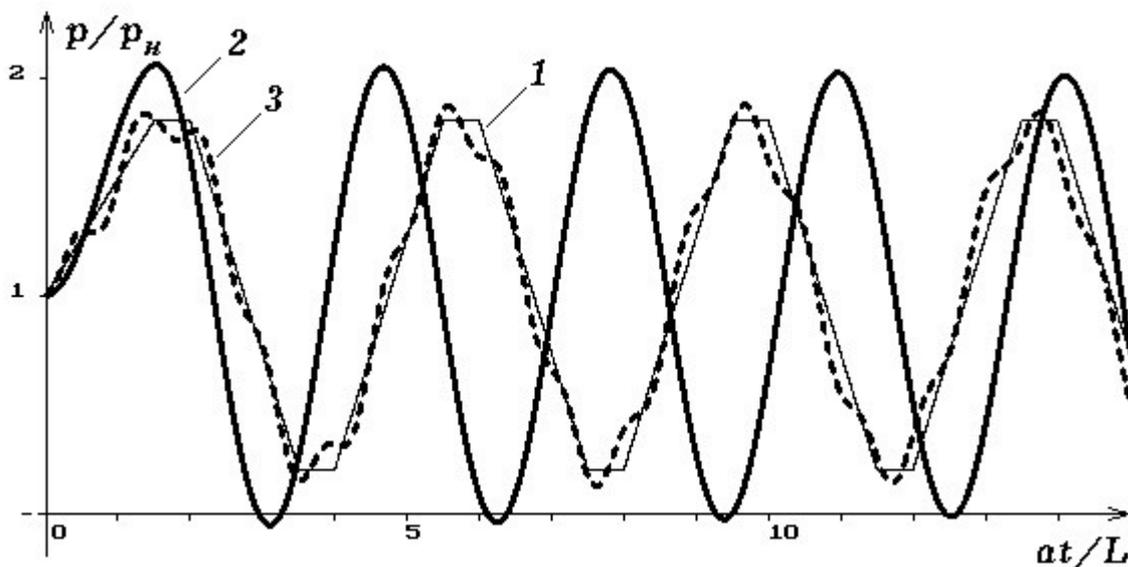


рис.6.16 Давление у задвижки при  $t_3/T = 1,5$  (линейное закрытие).  
 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

Для более правдоподобного гладкого закона закрытия эта тенденция становится еще более очевидной (рис.6.17 – рис.6.18).

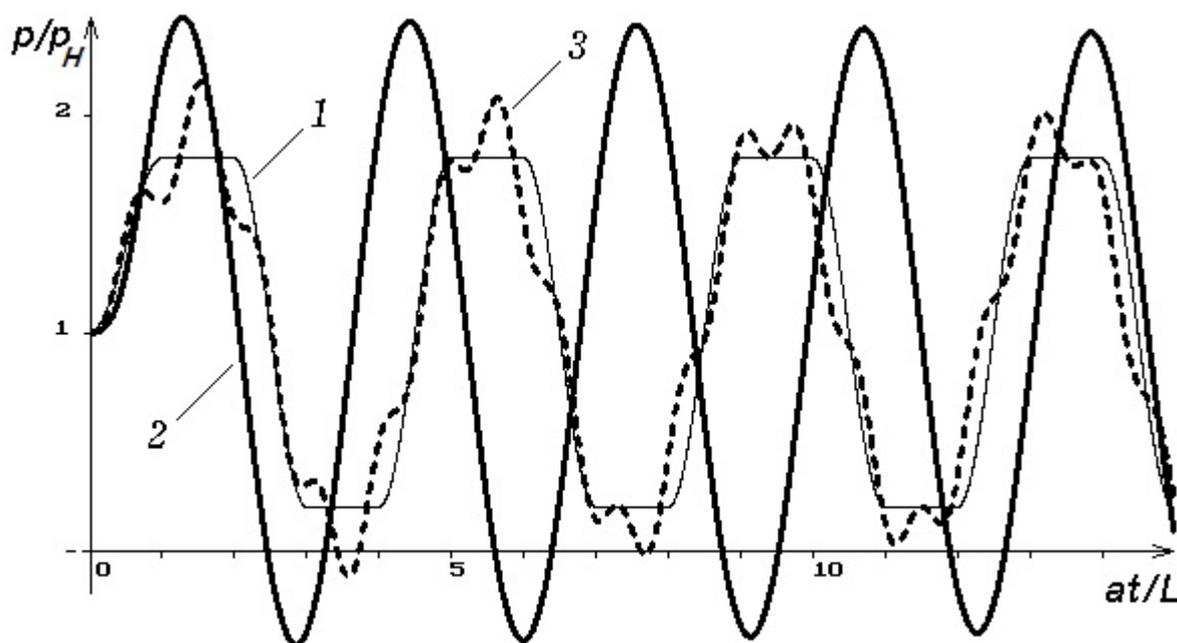


рис.6.17. Давление у задвижки при  $t_3/T = 1,0$  (гладкое закрытие).  
 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

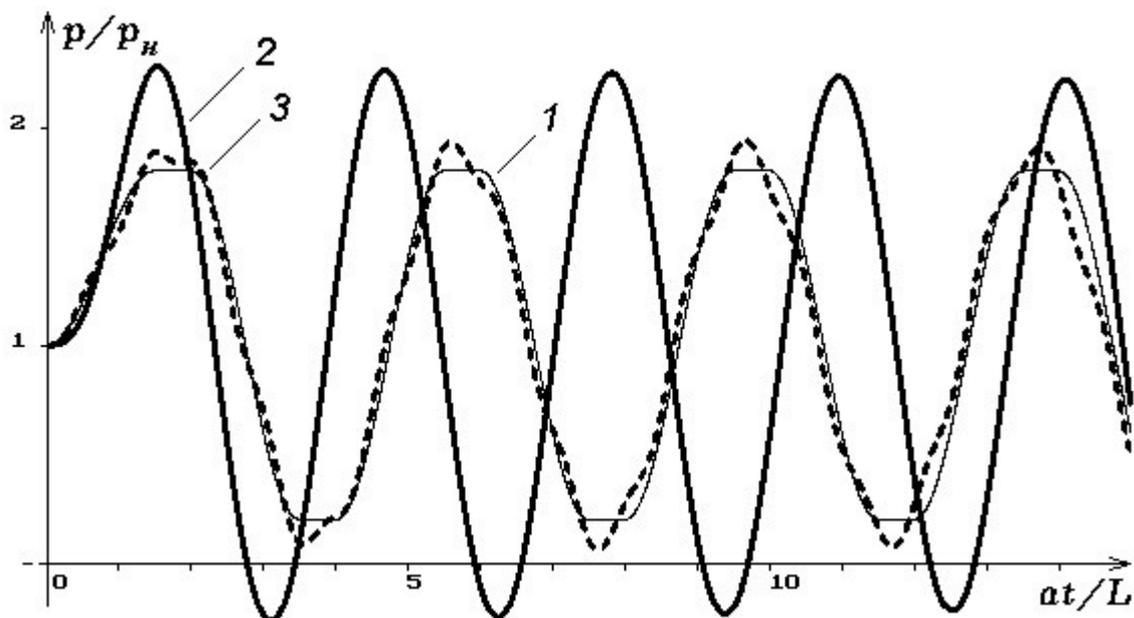


рис.6.18 Давление у задвижки при  $t_3/T = 1,5$  (гладкое закрытие).  
 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

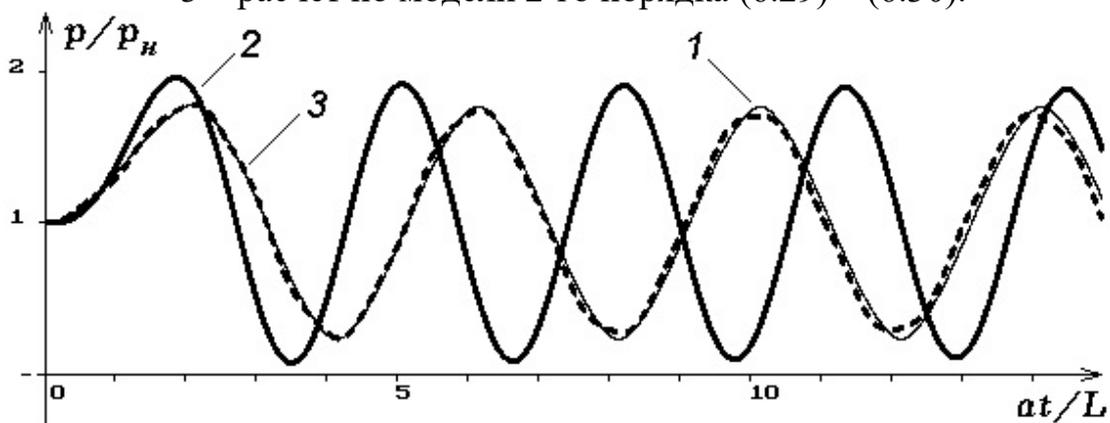


рис.6.19 Давление у задвижки при  $t_3/T = 2,3$  (гладкое закрытие).  
 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

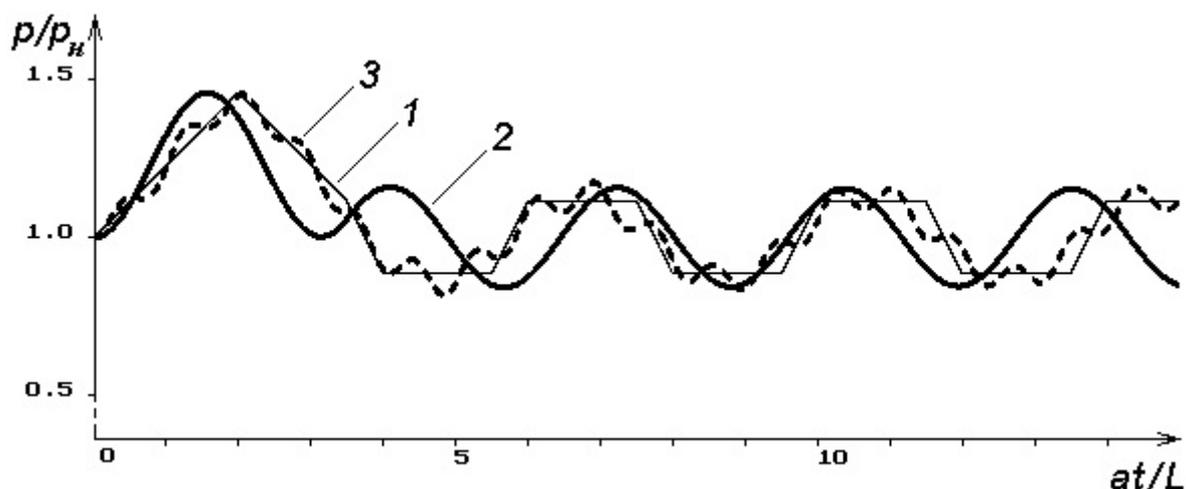


рис.6.20 Давление у задвижки при  $t_3/T = 3,5$  (линейное закрытие).

- 1 – точное решение (расчет на ЭВМ);
- 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);
- 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

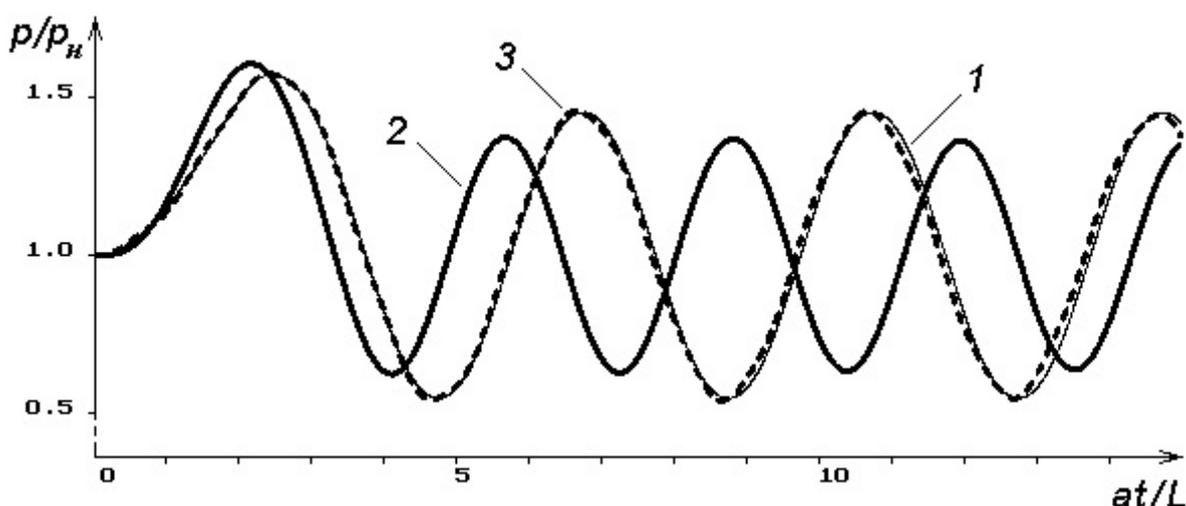


рис.6.21 Давление у задвижки при  $t_3/T = 3,5$  (гладкое закрытие).

- 1 – точное решение (расчет на ЭВМ);
- 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);
- 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

#### 6.4.3 Гидравлический удар в напорной линии центробежного насоса.

Рассмотрим достаточно типичную ситуацию работы центробежного насоса на напорный трубопровод. Схема трубопровода представлена на рис.6.7; в начале трубопровода ( $x=0$ ) расположен центробежный насос с ниспадающей характеристикой, которую будем задавать упрощенно в виде нисходящей

линейной зависимости. В конце трубопровода ( $x=L$ ) расположена задвижка, закрывающаяся по законам, описанным в предыдущем пункте.

Ниже представлены результаты расчетов для различных законов закрытия задвижки.

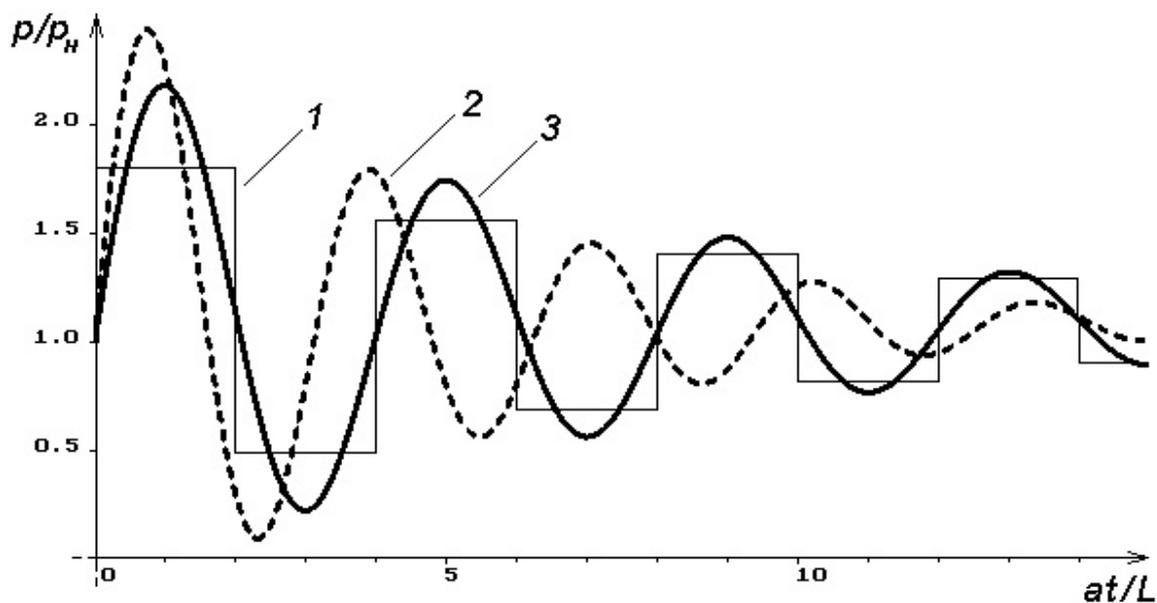


рис.6.22. Давление у задвижки при  $\lambda=0$  (мгновенное закрытие).

- 1 – точное решение по модели с распределенными параметрами;
- 2 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «симметричных» весовых коэффициентах (6.19);
- 3 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «специальном» выборе весовых коэффициентов (6.47).

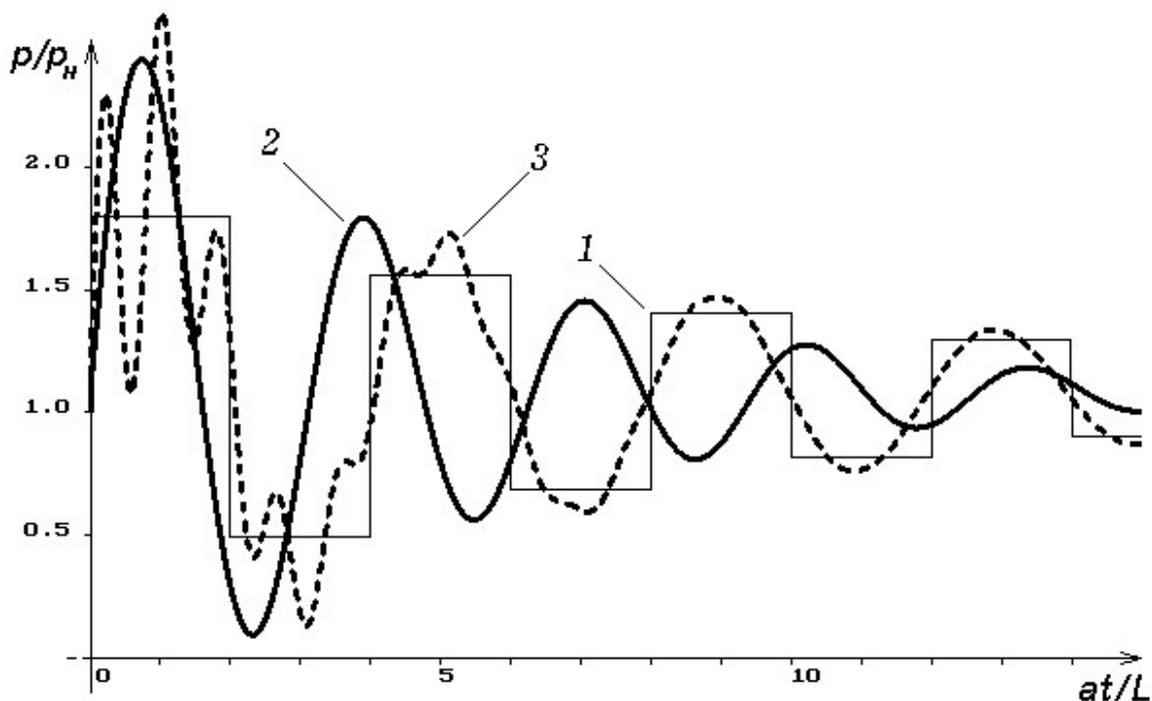


рис.6.23. Давление у задвижки при  $\lambda=0$  (мгновенное закрытие).

- 1 – точное решение по модели с распределенными параметрами;  
 2 – расчет по модели 1-го порядка с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «симметричных» весовых коэффициентах (6.19);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка с сосредоточенными параметрами (6.31) – (6.32).

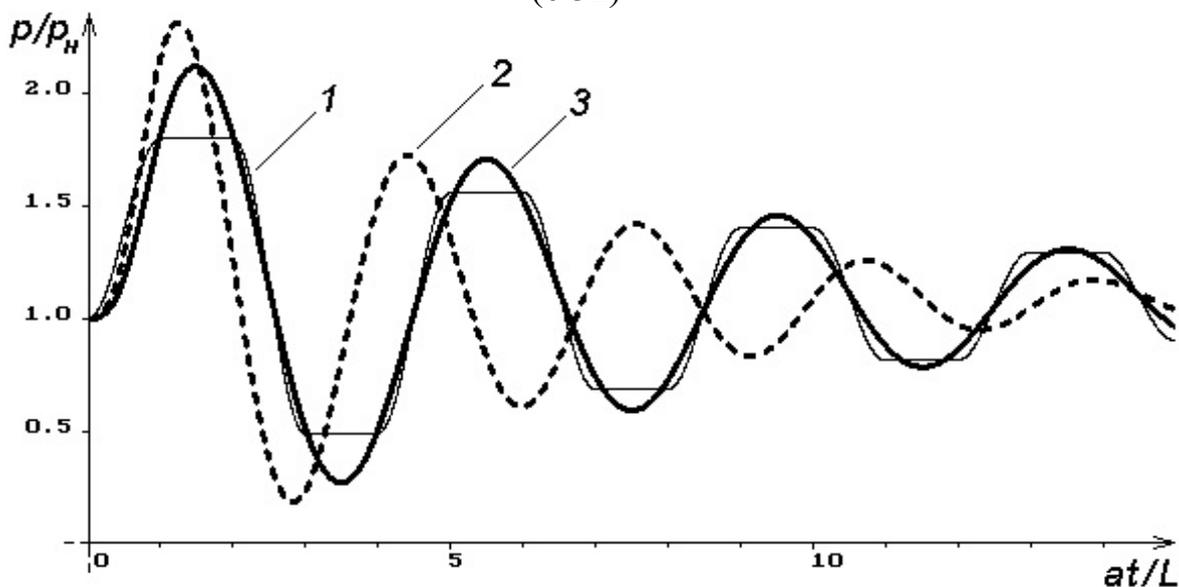


рис.6.24 Давление у задвижки при  $t_s/T = 0,5$  (гладкое закрытие).

- 1 – точное решение по модели с распределенными параметрами;  
 2 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «симметричных» весовых коэффициентах (6.19);  
 3 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при «специальном» выборе весовых коэффициентов (6.47).

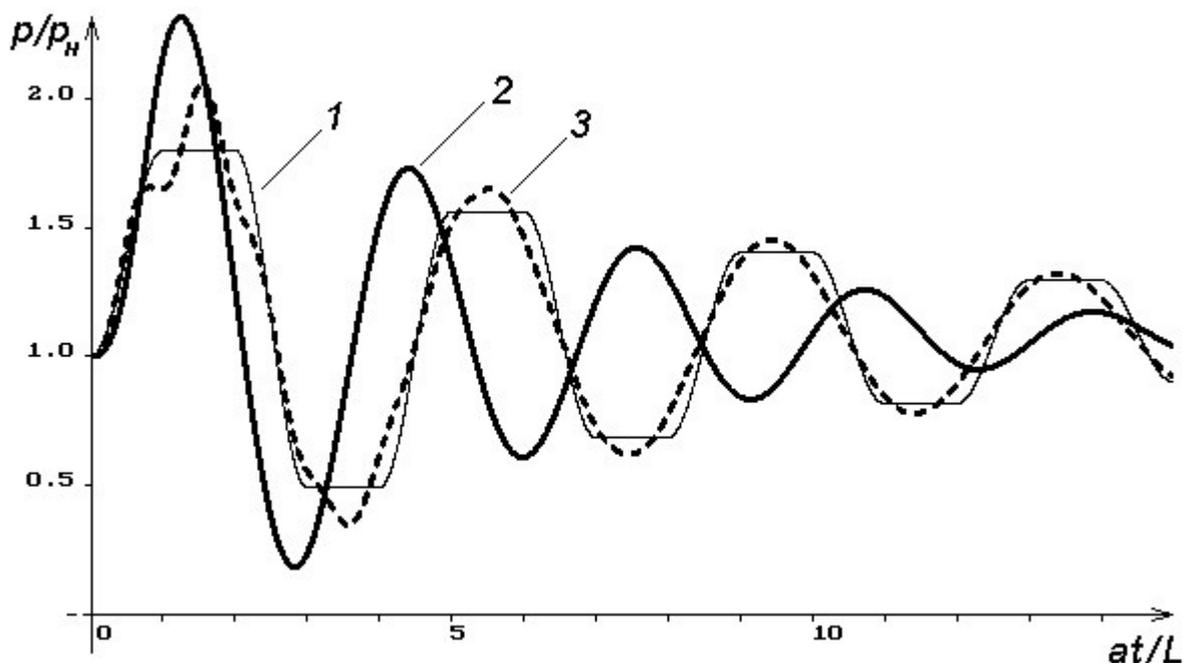


рис.6.25 Давление у задвижки при  $t_3/T = 0,5$  (гладкое закрытие).  
 1 – точное решение; 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

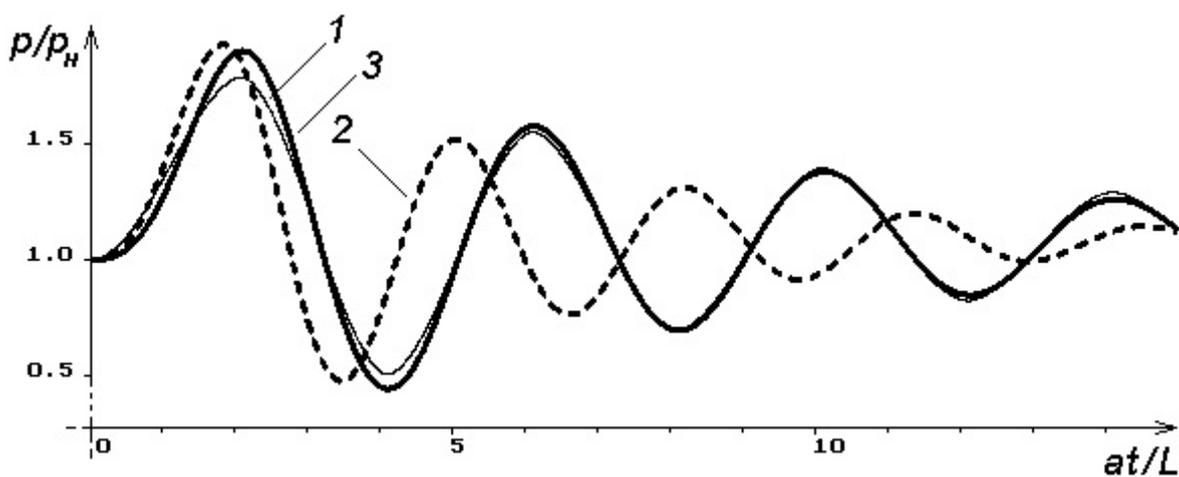


рис.6.26 Давление у задвижки при  $t_3/T = 2,2$ .  
 1 – расчет на ЭВМ по модели с распределенными параметрами;  
 2 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при  
 «симметричных» весовых коэффициентах (6.19);  
 3 – расчет по модели с сосредоточенными параметрами (6.17) – (6.18) при  
 «специальном» выборе весовых коэффициентов (6.47).

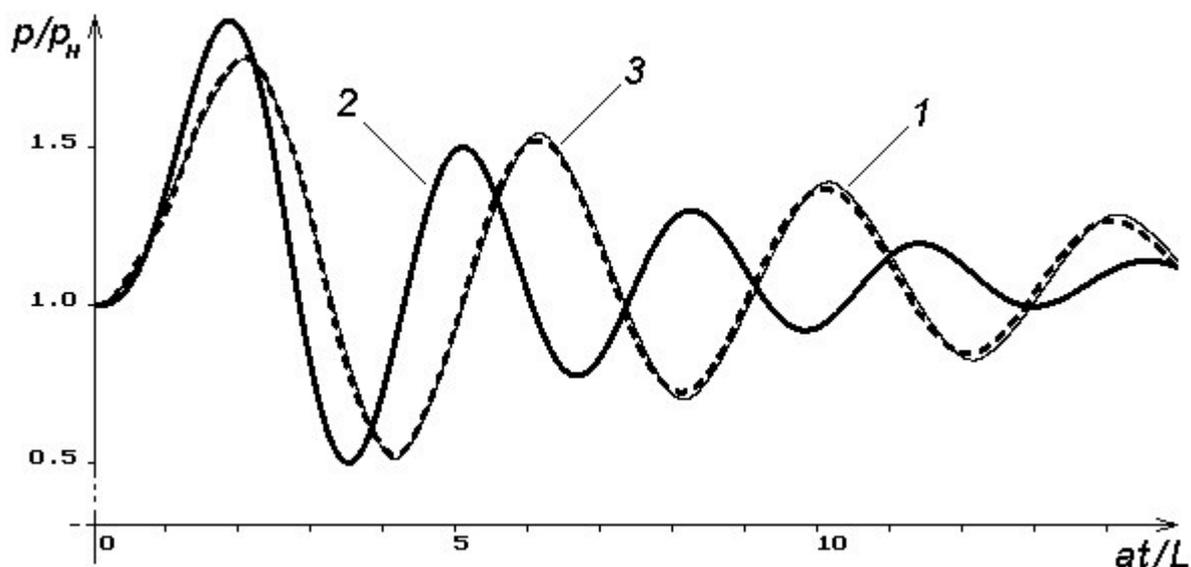


рис.6.27 Давление у задвижки при  $t_3/T = 2, 2$ .

- 1 – точное решение (расчет на ЭВМ);  
 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);  
 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

Таким образом, результаты расчетов показывают, что в данном случае применение модели с сосредоточенными параметрами дает еще более близкий результата к «точной» модели, ввиду демпфирующего свойства нагруженного насоса.

#### 6.4.4 Истечение жидкости из трубопровода

Рассмотрим истечение из опрессованного трубопровода (см. рис.6.28)

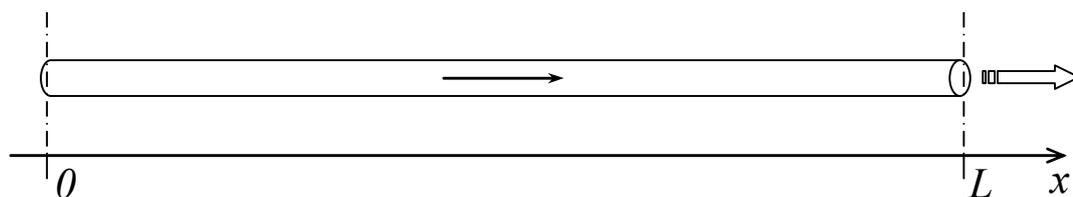


рис.6.28. Схема истечения.

На левом конце ( $x=0$ ) задано постоянное давление  $p_n$  :

$$p_0(t) = p_n, \quad (6.49)$$

а правый конец ( $x=L$ ) мгновенно соединяется с атмосферой при  $t=0$ :

$$p_L(t) = \begin{cases} p_n & , \text{ если } t \leq 0; \\ p_{атм} & , \text{ если } t > 0. \end{cases} \quad (6.50)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) жидкость покоится под давлением опрессовки  $p_n$ :

$$p_L(0) = p_n, \quad Q_0(0) = Q_n = 0. \quad (6.51)$$

В этом случае модель первого порядка дает среднюю линию процесса (см.), а модель 2-го порядка улавливает даже некоторые колебания; и та, и другая модель хорошо описывают асимптотику процесса и в среднем параметры истечения.

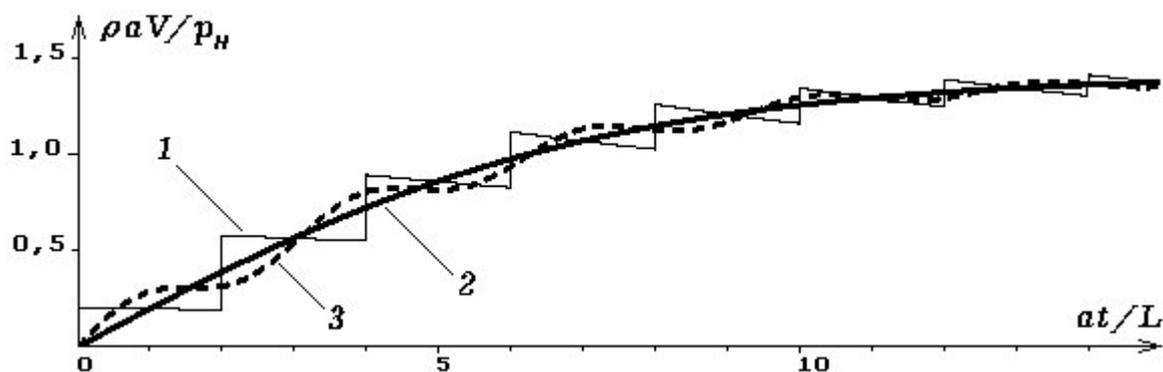


рис.6.29 Скорость истечение из трубопровода.

- 1 – точное решение (расчет на ЭВМ);
- 2 – расчет по модели 1-го порядка (6.20) – (6.21);
- 3 – расчет по модели 2-го порядка (6.29) – (6.30).

#### 6.4.5 Сопоставление нелинейной и упрощенной моделей второго порядка

Сопоставление нелинейной модели (6.31) – (6.33) и линейной (упрощенной) модели (6.38) – (6.39) второго порядка представлено на рис.6.30 – рис.6.34.

На этих рисунках по оси ординат отложено безразмерное давление  $p/p_{ном}$ , а по оси абсцисс – безразмерное время  $at/L$ .

При расчетах прямого гидравлического удара с мгновенным закрытием задвижки (см. рис.6.30) пренебрежение нелинейным слагаемым (6.33) вызывает более медленное затухание осцилляций по сравнению с нелинейной моделью, что вполне объяснимо, т.к. отброшенный нелинейный член появился при дифференцировании слагаемого потерь на трение в исходных уравнениях.

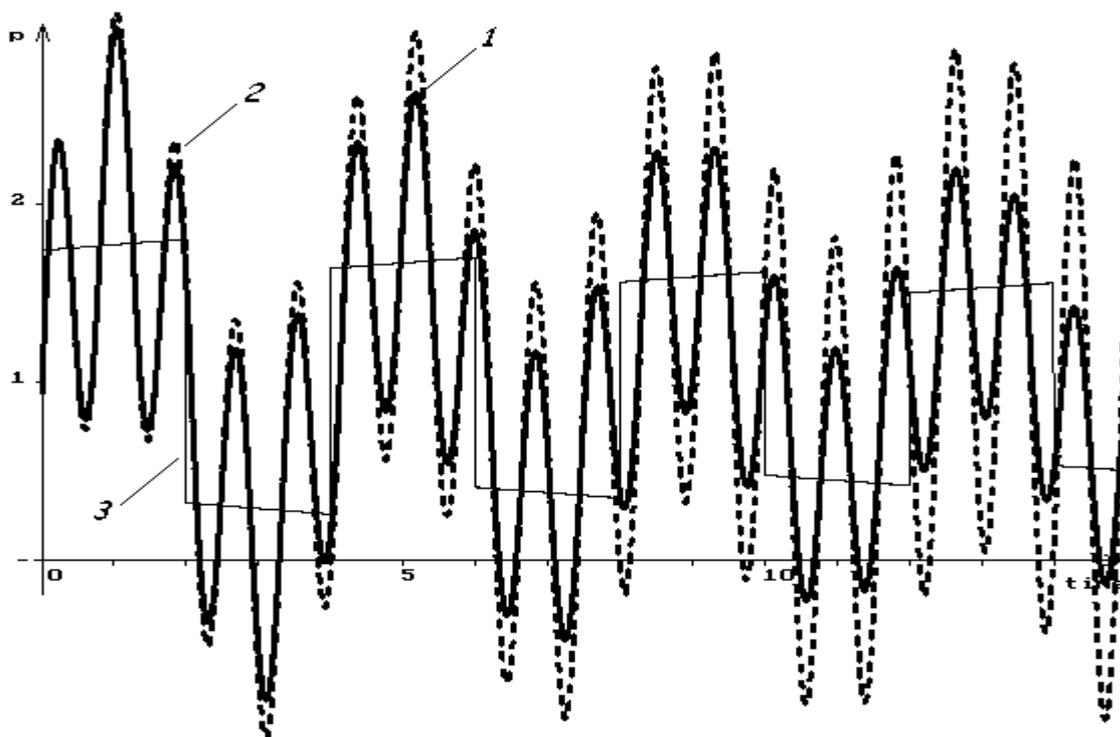


рис.6.30 Давление в простом трубопроводе при мгновенном закрытии задвижки.

- 1 – расчет по модели 2-го порядка (6.31) – (6.32);  
 2 – расчет по линеаризованной модели второго порядка (6.38) – (6.39);  
 3 – точное решение (расчет на ЭВМ по модели с распределенными параметрами).

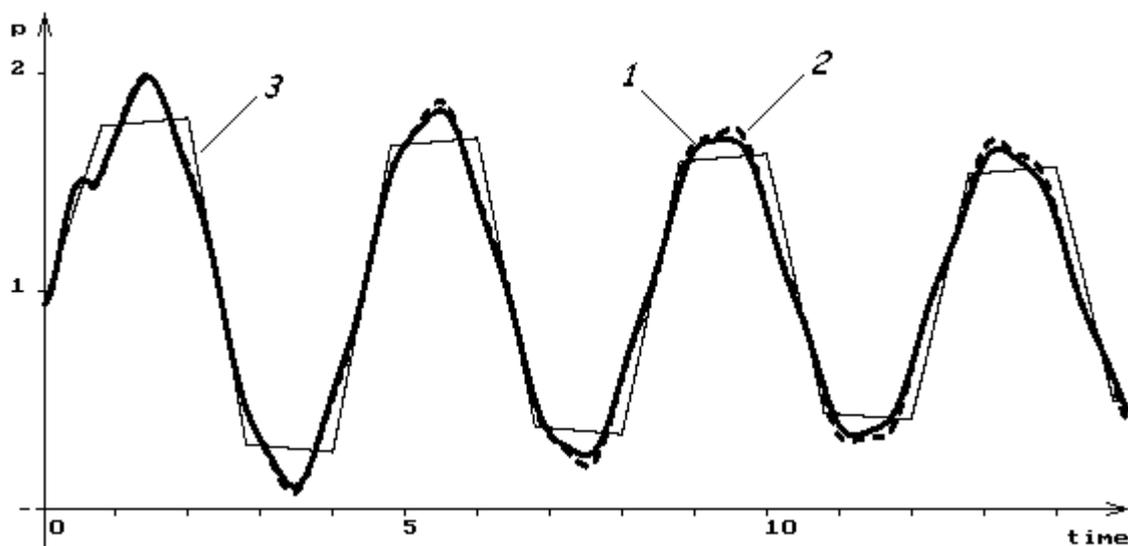


рис.6.31 Давление в простом трубопроводе при немгновенном закрытии задвижки ( $t_s/T = 0,8$ ). Обозначения те же.

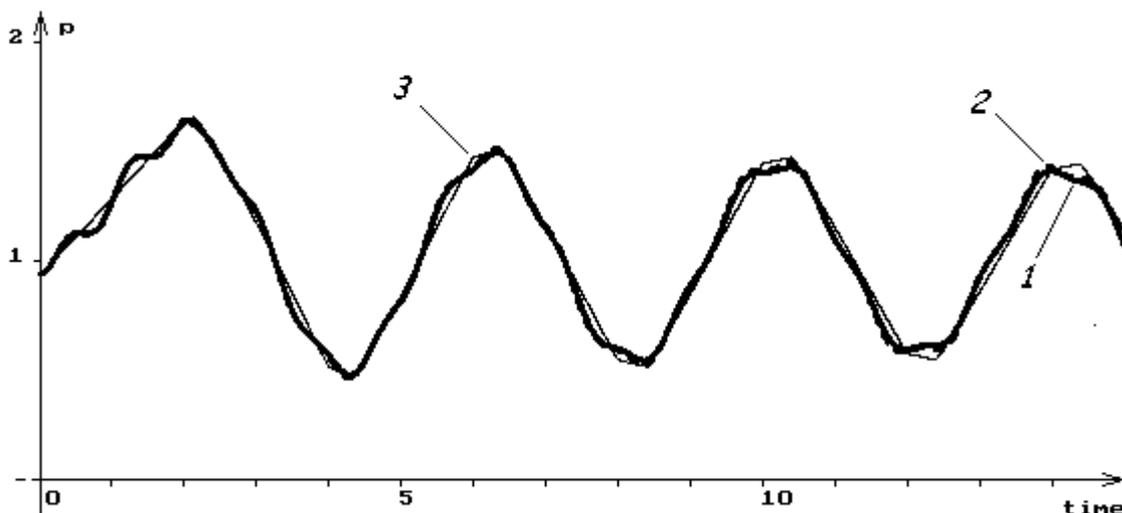


рис.6.32 Давление в простом трубопроводе при непрямом гидравлическом ударе (время закрытия задвижки  $t_3/T = 2,4$ ).  
Обозначения те же.

В случае гидравлического удара в трубопроводе, нагружаемом центробежным насосом (см. выше), даже при мгновенном закрытии задвижки, нелинейная и линеаризованная модели дают практически совпадающий результат и в целом хорошо описывают процесс (см. рис.6.32).

На рис.6.34 представлены результаты расчета задачи об истечении (см. рис.6.28), где по оси ординат отложена безразмерная скорость, а оси абсцисс – безразмерное время  $at/L$ . В этом случае обе модели дают практически неотличимые результаты.

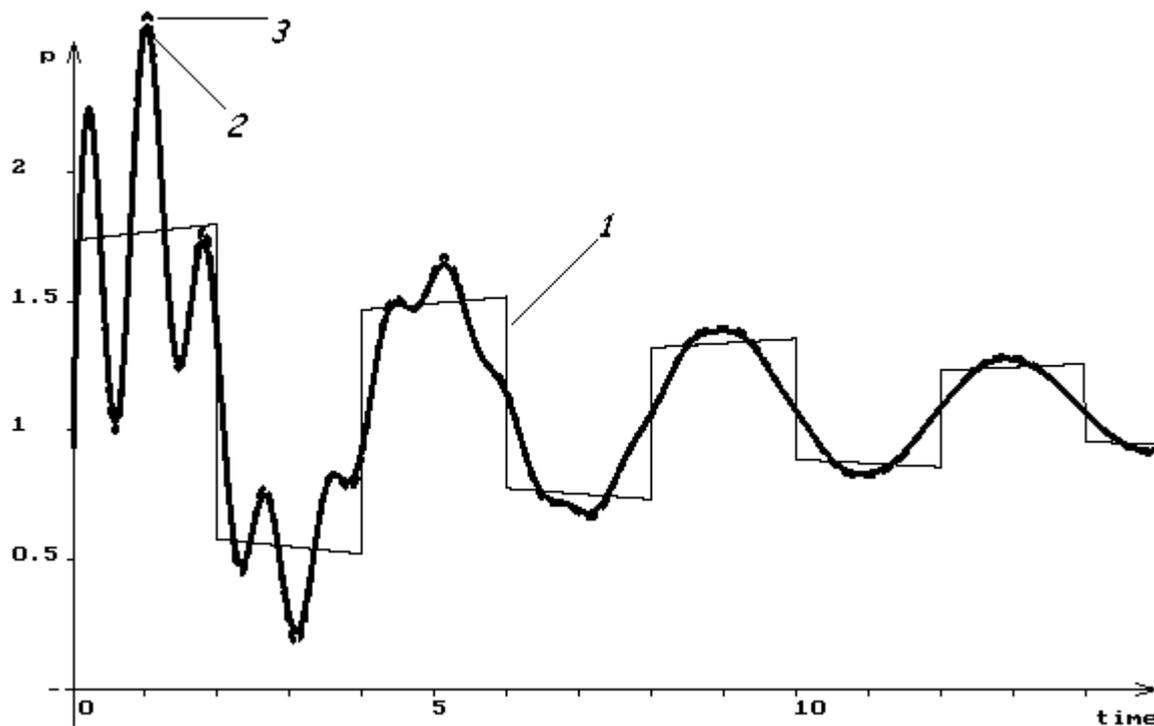


рис.6.33 Давление при гидравлическом ударе в простом трубопроводе, питаемом центробежным насосом. Обозначения те же.

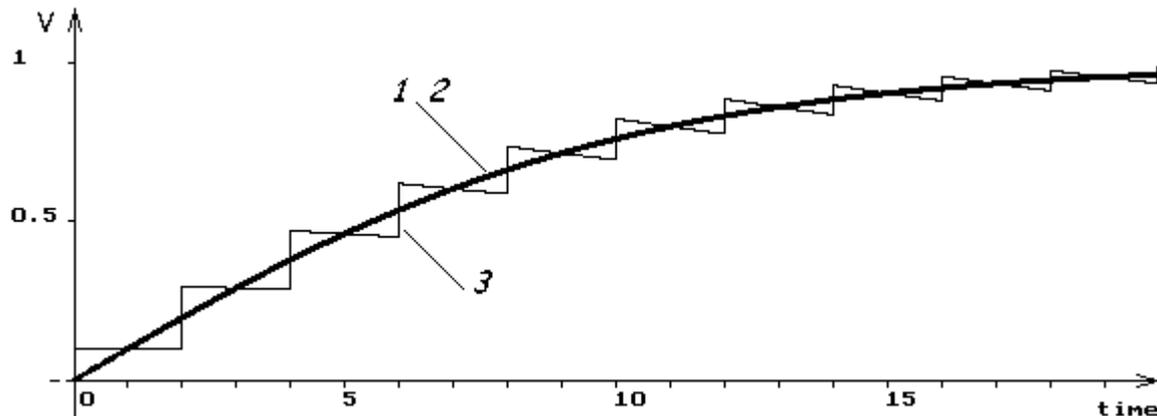


рис.6.34 Скорость истечения из напорного трубопровода.

- 1 – расчет по модели 2-го порядка (6.31) – (6.32);
- 2 – расчет по линейризованной модели второго порядка (6.38) – (6.39);
- 3 – точное решение (расчет по модели с распределенными параметрами).

Таким образом, в тех случаях, когда применение моделей с сосредоточенными параметрами оправдано (т.е. для гидравлических ударов средней и слабой интенсивности и для других видов неинтенсивных течений),

линеаризованная модель 2-го порядка (6.38) – (6.39) дает достаточно адекватные результаты.

Зануление  $R$  в уравнениях (6.31) – (6.32) ослабляет затухание осцилляций, что говорит о том, что отбрасываемый нелинейный член отвечает за затухание высокочастотных осцилляций, и можно трактовать коэффициент  $R$  (см. (6.33)) как коэффициент частотного трения.

Однако по мере снижения интенсивности гидравлического удара даже для прямого гидравлического удара с  $t_3/T = 0,8$  (см. рис.6.31), где  $t_3$  – время закрытия задвижки, различия между нелинейной и линеаризованной моделями сглаживаются, и обе описывают нестационарный процесс все более точно. Для непрямого гидравлического удара обе модели дают практически совпадающий результат и хорошо описывают нестационарный процесс (см. рис.6.32).

#### 6.5. Сложная трубопроводная система. Процедура эквивалентизации.

Рассмотрим сложную трубопроводную систему  $\Gamma$ . Задача эквивалентизации состоит в том, чтобы заменить часть этой системы  $\Gamma_s \subset \Gamma$  некоторым узлом с эквивалентными характеристиками. Таким образом, подсистема  $\Gamma_s$ , для описания которой применяются как модели с распределенными параметрами (для труб), так и модели с сосредоточенными параметрами (для узлов), будет описываться более простой моделью с сосредоточенными параметрами.

Первый шаг эквивалентизации состоит в замене для  $\Gamma_s$  моделей с распределенными параметрами, описывающих течения в трубопроводах  $\Gamma_s$ , на модели с сосредоточенными параметрами согласно методике, описанной выше.

Пусть  $n$  – число труб, а  $m$  – число узлов, входящих в  $\Gamma_s$ ; соответственно,  $i_1, i_2, \dots, i_n$  – номера труб и  $j_1, j_2, \dots, j_m$  – номера узлов, входящих в  $\Gamma_s$ . Тогда функционирование части трубопроводной сети  $\Gamma_s$  будет описываться системой из  $2 \times n$  дифференциальных уравнений в частных производных и, в общем

случае, системой из  $\sum_{k=1}^{k=m} (r^j + l^j)$  алгебраических и обыкновенных уравнений, где  $r^j = |R^j|$  – число труб, примыкающих к узлу  $j$ ,  $l^j$  – число собственных параметров узла  $j$ . Если же для описания процессов в трубах будут применяться модели с сосредоточенными параметрами, то функционирование  $\Gamma_s$  будет описываться смешанной системой из  $\eta m + \sum_{k=1}^{k=m} (r^j + l^j)$  алгебраических и обыкновенных уравнений, где  $\eta$  зависит от применяемых моделей для одиночной трубы:  $\eta = 2$  для моделей (6.8) – (6.9) и (6.31) – (6.32),  $\eta = 3$  для моделей (6.22) – (6.24), и т.д.

Таким образом, функционирование трубопроводной подсистемы  $\Gamma_s$  будет описываться только обыкновенными дифференциальными уравнениями и алгебраическими уравнениями, для решения которых требуется меньшее количество вычислительных ресурсов по сравнению с уравнениями в частных производных.

Второй шаг эквивалентизации основан на том, что в некоторых случаях описание функционирования трубопроводной подсистемы  $\Gamma_s$  можно свернуть до одной модели с сосредоточенными параметрами.

Определение. Внутренними узлами подсистемы  $\Gamma_s$  будут называться узлы валентности не ниже 2, для которых все инцидентные трубы принадлежат подсистеме  $\Gamma_s$ . Все остальные узлы  $\Gamma_s$  будут называться граничными.

Допустим, внутренние узлы, входящие в  $\Gamma_s$ , представляет собой соединение труб без утечек, описываемое уравнениями (3.4) – (3.5), а трубы описываются моделью с сосредоточенными параметрами (6.1), (6.4) или, что то же самое, (6.8) – (6.9). Отметим, что модель (6.1), (6.4) является базовой как для моделей 1-го порядка, так и для моделей 2-го порядка, в зависимости от способа аппроксимации средних величин (6.5).

Процедура 1.

Рассмотрим последовательное соединение двух труб без утечек (рис.6.35, а).

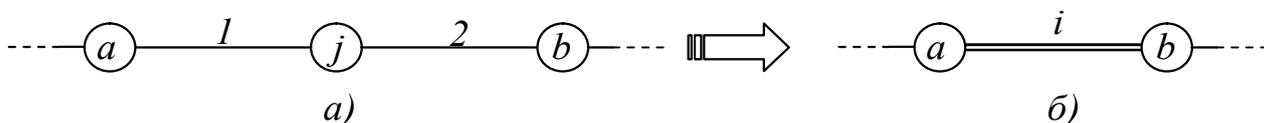


рис.6.35. Схема эквивалентизации последовательного соединения труб.

Допустим, узел  $j$  представляет собой последовательное соединение труб без утечек. Пусть трубы 1 и 2 описываются моделью с сосредоточенными параметрами 1-го порядка (6.8) – (6.9).

Складывая уравнения (6.8), записанные для каждого трубопровода и учитывая условия сопряжения (3.5), имеем

$$C_{H,1} \frac{dp_{*,1}}{dt} + C_{H,2} \frac{dp_{*,2}}{dt} = Q_{0,1} - Q_{L,2}$$

Определяя среднее значение давления как

$$p_* = \frac{C_{H,1} p_{*,1} + C_{H,2} p_{*,2}}{C_{H,1} + C_{H,2}} \quad (6.52)$$

получаем, что для эквивалентного участка (рис.6.35, б) также справедливо уравнение вида (6.8), с эквивалентной характеристикой (6.3) («гидравлической ёмкостью»):

$$C_H^{э\kappa\text{б}} = C_{H,1} + C_{H,2}. \quad (6.53)$$

Аналогично, складывая уравнения (6.9), записанные для каждого участка, и учитывая условия сопряжения (3.4), получаем

$$L_{H,1} \frac{dQ_{*,1}}{dt} + L_{H,2} \frac{dQ_{*,2}}{dt} = p_{0,1} - p_{L,2} + \rho g(z_{0,1} - z_{L,2}) - \rho(L_1 a_{fr,1} + L_2 a_{fr,2}).$$

Определяя среднее значение расхода как

$$Q_* = \frac{L_{H,1} Q_{*,1} + L_{H,2} Q_{*,2}}{L_{H,1} + L_{H,2}}$$

и среднее ускорение трения как

$$a_{fr} = \frac{L_1 a_{fr,1} + L_2 a_{fr,2}}{L_1 + L_2} \quad (6.54)$$

получаем, что для эквивалентного участка (рис.6.35, б) также справедливо уравнение вида (6.9), с эквивалентной характеристикой «гидравлическая индуктивность» (6.7):

$$L_H^{эkv} = L_{H,1} + L_{H,2}. \quad (6.55)$$

Используя понятие сопротивления трубопровода  $S$ , уравнение для эквивалентного участка с характеристикой (6.55) можно представить и в виде (6.9), где

$$\overline{S|Q|Q} = \overline{S_1|Q_1|Q_1} + \overline{S_2|Q_2|Q_2}.$$

В случае стационарного режима имеем  $Q_* = Q = Q_1 = Q_2$  и

$$\overline{S_1|Q_1|Q_1} = S_1|Q_1|Q_1, \quad \overline{S_2|Q_2|Q_2} = S_2|Q_2|Q_2, \quad (6.56)$$

тогда

$$\overline{S|Q|Q} = S|Q|Q \quad (6.57)$$

где

$$S = S_1 + S_2. \quad (6.58)$$

Соотношение (6.55) может служить для нахождения  $S^{эkv}$  для эквивалентного участка.

Процедура 2.

Рассмотрим параллельное соединение двух труб (рис.6.36, а).

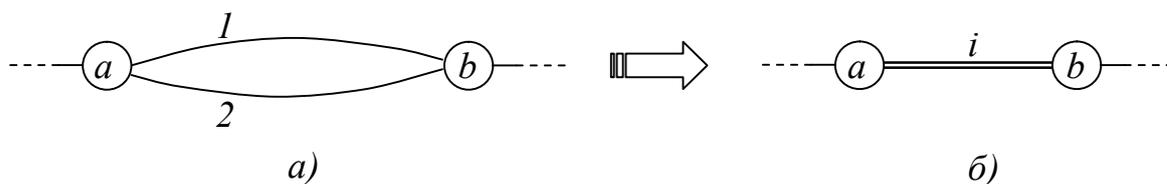


рис.6.36 Схема эквивалентизации параллельного соединения труб.

Складывая уравнения (6.8), записанные для каждого трубопровода и учитывая, что  $Q_0 = Q_{0,1} + Q_{0,2}$  и  $Q_L = Q_{L,1} + Q_{L,2}$ , получаем

$$C_{H,1} \frac{dp_{*,1}}{dt} + C_{H,2} \frac{dp_{*,2}}{dt} = Q_0 - Q_L.$$

Определяя среднее значение давления по (6.52), получаем, что для эквивалентного участка (рис.6.36, б) также справедливо уравнение вида (6.8), с эквивалентной характеристикой (6.53).

Аналогично, складывая уравнения (6.9), записанные для каждого участка, и учитывая, что трубопроводы 1 и 2 имеют общий перепад напоров между точками  $a$  и  $b$ , получаем

$$\frac{dQ_{*,1}}{dt} + \frac{dQ_{*,2}}{dt} = \left( \frac{1}{L_{H,1}} + \frac{1}{L_{H,2}} \right) \cdot [p_0 - p_L + \rho g(z_0 - z_L)] - \rho \cdot \left( \frac{L_1 a_{fr,1}}{L_{H,1}} + \frac{L_2 a_{fr,2}}{L_{H,2}} \right).$$

Считая, что

$$Q_* = Q_{*,1} + Q_{*,2} \quad (6.59)$$

получаем, что для эквивалентного участка (рис.6.36, б) также справедливо уравнение вида (6.9), с эквивалентной характеристикой:

$$L_H^{эkv} = \left( \frac{1}{L_{H,1}} + \frac{1}{L_{H,2}} \right)^{-1} = \frac{L_{H,1} \cdot L_{H,2}}{L_{H,1} + L_{H,2}}, \quad (6.60)$$

при этом слагаемое трения определяется как

$$L_H^{эkv} a_{fr} = \frac{L_1 a_{fr,1} + L_2 a_{fr,2}}{L_{H,1} + L_{H,2}} \left( \frac{1}{L_{H,1}} + \frac{1}{L_{H,2}} \right)^{-1} \quad (6.61)$$

Используя понятие сопротивления трубопровода  $S$ , уравнение для эквивалентного участка с характеристикой (6.60) можно представить и в виде (6.9), где

$$\overline{S|Q|Q} = \frac{L_{H,2} \overline{S_1|Q_1|Q_1} + L_{H,1} \overline{S_2|Q_2|Q_2}}{L_{H,1} + L_{H,2}}. \quad (6.62)$$

В случае стационарного режима имеем  $Q_* = Q = Q_1 + Q_2$ , и справедливо (6.56) – (6.57), тогда

$$S = \frac{S_1 \cdot S_2}{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}. \quad (6.63)$$

Соотношение (6.63) может служить для нахождения  $S^{эkv}$  для эквивалентного участка.

Таким образом, комбинируя операции 1 и 2, можно упростить трубопроводную систему, получая на каждом шаге упрощения модель с сосредоточенными параметрами вида (6.8) – (6.9), коэффициенты которой последовательно определяются по формулам (6.53) и (6.55) или (6.60).

Для окончательного замыкания модели надо выбрать подходящую интерпретацию средних величин  $p_*$  и  $Q_*$ .

#### 6.6. Эквивалентизация части системы технологических трубопроводов АЭС.

Система технологических трубопроводов АЭС представлена на рис. 5.9. Она представляет собой 22 раздаточных коллектора, присоединенных к общему напорному коллектору. От каждого раздаточного коллектора вода по 45 водяным трубопроводам подается к рабочей зоне. Рассмотрим в качестве подсистемы  $\Gamma_s$  одну ветвь, состоящую из раздаточного коллектора с водяными трубопроводами.

На концевых узлах водяных трубопроводов (подходящих к рабочей зоне реактора) задано постоянное давление  $p_{wz}$ . Остальные узлы  $\Gamma_s$  представляют собой соединения труб без утечек (3.4) – (3.5).

Процедура эквивалентизации начинается с «висячих» водяных трубопроводов, начиная с самой «дальней», которая заменяются одним участком в соответствии с процедурой 2, затем этот участок и трубопровод заменяются одним эквивалентным участком по процедуре 1, затем этот участок и трубопровод заменяются одним эквивалентным участком согласно процедуре 2, и т.д., как представлено на рис.6.35 – рис.6.36.

В результате вся подсистема  $\Gamma_s$  (ветвь) будет некоторым узлом вида (6.8) – (6.9) с эквивалентными характеристиками

$$C_H^{общ} \cdot \alpha \frac{dp}{dt} = Q - Q_e$$

$$L_H^{общ} \cdot \left[ \beta \cdot \frac{dQ}{dt} + (1 - \beta) \frac{dQ_e}{dt} \right] = p - p_e + \rho g \Delta z - S^{общ} |Q|Q, \quad (6.64)$$

где  $C_H^{обц}$  – коэффициент упругости трубопроводной подсистемы, подсчитанный по формулам (6.53) в соответствии с процедурами 1 - 2;  $L_H^{обц}$  – коэффициент, характеризующий инерционные свойства подсистемы, подсчитанный по формулам (6.55) или (6.60);  $\alpha, \beta$  – весовые коэффициенты;  $S^{обц}$  – обобщенное сопротивление трубопроводной системы, характеризующий потери на трение, посчитанное по формулам (6.58) и (6.63).

Здесь  $Q$  и  $p$  – соответственно, расход и давление в узле;  $Q_e$  – суммарный расход по всем трубам в  $\Gamma_s$ ;  $p_e$  – среднее давление на концах труб в  $\Gamma_s$ ,  $\Delta z$  – средняя разность вертикальных отметок.

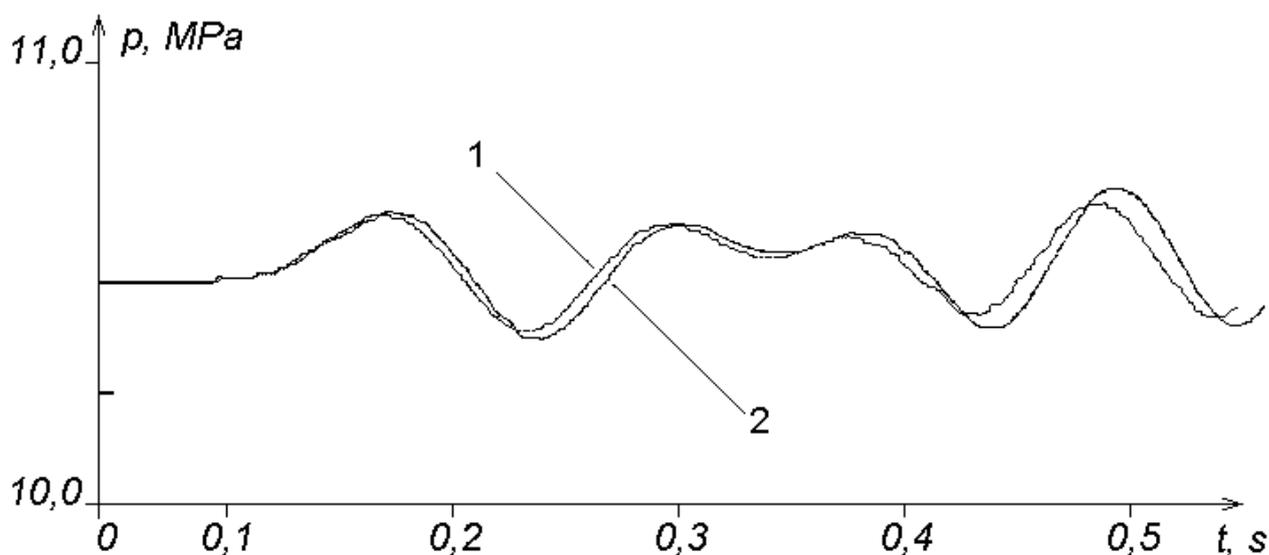


рис.6.37. Давление в системы технологических трубопроводов АЭС.

Сопоставление расчетов по полной (кривая 1) и упрощенной моделям (кривая 2).

На рис.6.37 приведено сопоставление результатов расчета по полной модели и соответствующей упрощенной модели, которое показало расхождение 0,5% – 0,9%.

### 6.7. Специальный испытательный стенд («труба в трубе»)

Рассматривается вариант математического моделирования переходных гидродинамических процессов, возникающих в специальной испытательной

конструкции, когда возможности упрощения основных уравнений априорно предопределяются физикой протекающих в гидросистеме явлений.

Рассмотрим гидросистему, состоящую из внешнего кругового цилиндра 1, ограниченного по торцам полусферами, и коаксиально расположенного внутреннего цилиндра 2 с плоскими основаниями, одно из которых присоединено к соответствующей полусфере внешнего сосуда переходной трубой 3 (см. рис.6.38)

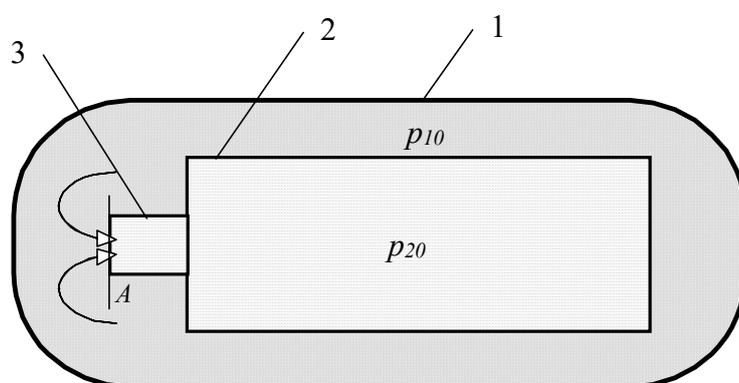


рис.6.38 Специальная гидравлическая система.

Система находится под постоянным внешним давлением  $p_0 = p_{атм}$ . Пространство между внешней и внутренней оболочками заполнено жидкостью под высоким давлением  $p_{10}$ . Во внутреннем сосуде и переходной трубе находится жидкость под давлением  $p_{20}$ , которое можно считать равным  $p_{атм}$ .

Рассмотрим гидродинамический процесс, возникающий при разрушении переходной трубы в сечении  $A$  и воссоединении полостей высокого и низкого давлений, сопровождающийся перетеканием жидкости из одной полости в другую.

Одним из основных вопросов, подлежащих изучению, является вопрос о возможности в процессе возникающих колебаний превышения давления в гидросистеме над начальным и о максимальном значении этого превышения.

### 6.7.1 Постановка задачи в рамках теории гидравлического удара

Рассмотрим возникающий нестационарный процесс с позиции одномерных уравнений теории гидравлического удара в системе напорных трубопроводов.

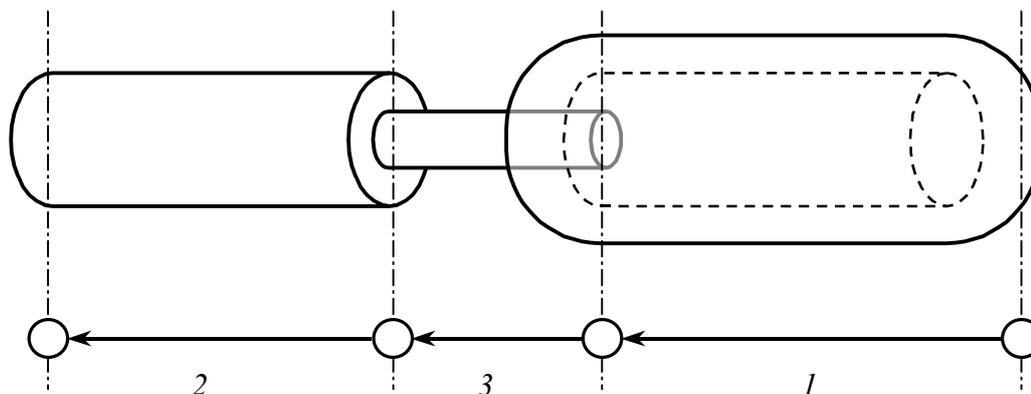


рис.6.39 Схематизация специальной гидравлической системы в виде последовательно соединенных труб.

Схематизируем гидросистему, изображенную на рис.6.38, в виде трех последовательно соединенных круглых труб, как показано на рис.6.39. Самая левая из них 2 имеет размеры внутреннего цилиндра, средняя 3 - размеры переходной трубы, а самая правая 1 имеет площадь поперечного сечения, равную площади кольцевого зазора между внутренним и внешним цилиндрами исходной гидросистемы ( $\omega_1$ ) и длину  $L_1 = W_1/\omega_1$ , где  $W_1$  - объем воды, заключенной между внутренним и внешним цилиндрами.

Скорость распространения волны гидравлического удара  $a$  во всех трубах системы будем определять по формуле Н.Е. Жуковского (2.19) для тонкостенных труб круглого сечения.

Тогда исследование нестационарных процессов в гидросистеме сведется к решению системы уравнений гидравлического удара (2.43) – (2.44) (индекс  $i$  для простоты опущен)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho a^2}{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f \equiv -\frac{\lambda |Q| Q}{4R\omega} - g\omega \frac{dz}{dx}, \quad (6.66)$$

определенных на каждом  $i$ -том участке расчетной схемы рис.6.39 ( $i=1,2,3$ ), при соответствующих начальных и граничных условиях.

Здесь  $p=p(x,t)$  - давление,  $Q=Q(x,t)$  - расход,  $\lambda$  - коэффициент трения о стенки [3],  $z=z(x)$  - вертикальная отметка оси трубы (в данной задаче  $z = const$ ).

### 6.7.2 Граничные условия и условия сопряжения

Граничные условия задаем в следующем виде: на левом конце первой трубы и правом конце второй трубы ставим условия непротекания (расход равен нулю), а в местах соединения труб ставим условие равенства расходов (баланс масс) и давлений (пренебрегаем разностью скоростных напоров и потерями):

$$Q_2(L_2, t) = 0, \quad Q_1(0, t) = 0, \quad Q_1(L_1, t) = Q_3(0, t), \quad Q_3(L_3, t) = Q_2(0, t). \quad (6.67)$$

$$p_1(L_1, t) = p_3(0, t), \quad p_3(L_3, t) = p_2(0, t), \quad (6.68)$$

где  $L_i$  - длина  $i$ -той трубы.

### 6.7.3 Начальные условия

В качестве начальных условий принимаем, что при  $t=0$  давление в первой трубе равно  $p_{10}$ , а во второй и третьей трубах давления равно  $p_{20}$ , начальные скорости всюду равны нулю:

$$p_1(x, 0) = p_{10}, \quad p_2(x, 0) = p_3(x, 0) = p_{20}, \quad Q_1(x, 0) = Q_2(x, 0) = Q_3(x, 0) = 0. \quad (6.69)$$

### 6.7.4 Результаты численных расчетов

Задача (6.65) – (6.69) была решена на ЭВМ численно конечно-разностным методом бегущего счета (см. п. 5.1.3) для нижеприведенных значений параметров гидросистемы:

$$\begin{aligned} L_1 &= 27,8 \text{ м}; \quad L_2 = 16,6 \text{ м}; \quad L_3 = 5,2 \text{ м}; \\ \omega_1 &= 59,1 \text{ м}^2; \quad \omega_2 = 45,4 \text{ м}^2; \quad \omega_3 = 1,04 \text{ м}^2; \\ p_{10} &= 16,6 \text{ МПа}; \quad p_{20} = 0,1 \text{ МПа}; \\ a_1 &= 972 \text{ м/с}; \quad a_2 = 1222 \text{ м/с}; \quad a_3 = 1265 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Результаты расчетов представлены на рис.6.40.

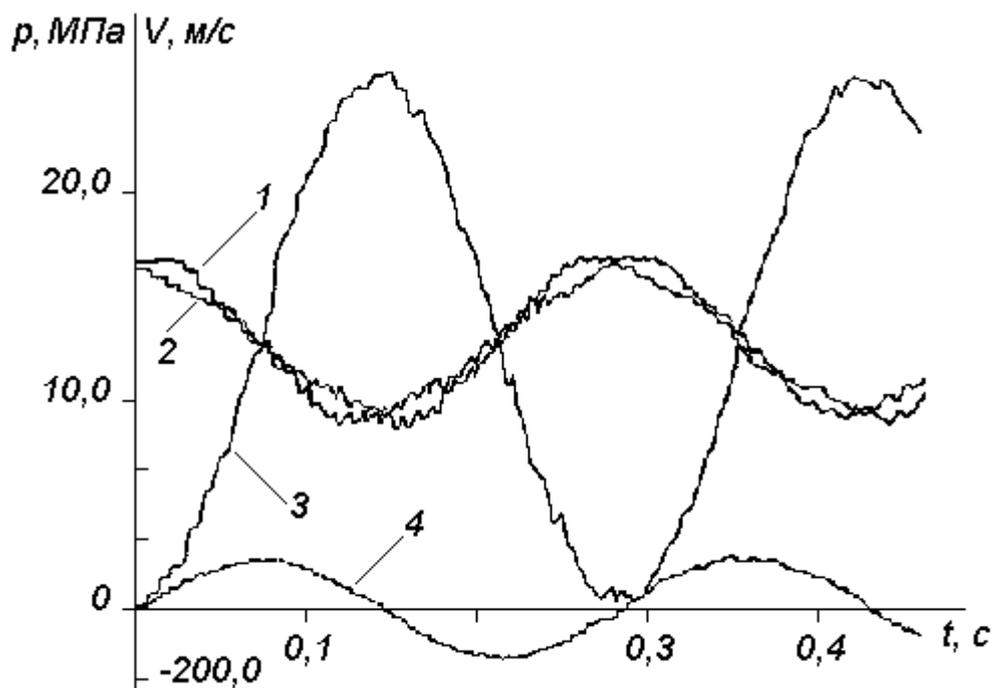


рис.6.40. Переходный процесс в системе.

1 - давление в начале внешнего цилиндра; 2 - давление в конце внешнего цилиндра; 3 - давление в начале внутреннего цилиндра; 4 - скорость в конце переходного патрубка (3-я труба).

Анализ полученных результатов показывает, что, во-первых, как давление, так и расход жидкости в различных точках гидросистемы представляют собой практически периодические функции времени – гармонические колебания с периодом около  $0,29$  сек.

Во-вторых, давление во внешнем сосуде 1 практически не превышает начального значения  $167$  атм, давление же во внутреннем сосуде периодически достигает величины  $260$  атм. Периодически велики и скорости течения, образующегося в переходной трубе, достигающие величины  $140$  м/сек.

В третьих, перепадами давления вдоль 1 и 2 сосудов можно пренебречь в сравнении с изменением этих величин во времени, а в переходной трубе можно пренебречь изменением расхода вдоль этой трубы, т.е. пренебречь аккумулятивными свойствами переходного патрубка.

Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить систему уравнений (6.65)–(6.66), используя модели сосредоточенных параметров (предложено А.А.Атавиным в работе [15]).

### 6.7.5 Упрощенное решение задачи

Как следует из результатов вышеприведенных расчетов, для сосудов 1 и 2 можно пренебречь зависимостью давления от  $x$ , т.е. вместо (6.66) взять уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (6.71)$$

т.е. по существу пренебречь оставшимися членами уравнения (6.66) вследствие малости скоростей течения жидкости в сосудах 1 и 2.

Тогда давления в сосудах 1 и 2 будут только функциями времени  $p_1(t)$  и  $p_2(t)$ . Уравнение (6.65) при этом может быть проинтегрировано по длине каждого из сосудов 1 и 2. В итоге получим

$$\frac{dp_1}{dt} = -a_{10}Q_3, \quad (6.72)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = a_{20}Q_3. \quad (6.73)$$

Здесь  $Q_3$  – расход через соединительный патрубок 3, который в соответствии с результатами тех же расчетов также можно считать не зависящим от  $x$ , т.е.  $Q_3 = Q_3(t)$ , а

$$a_{10} = \frac{\rho a_1^2}{\omega_1 L_1}, \quad a_{20} = \frac{\rho a_2^2}{\omega_2 L_2}. \quad (6.74)$$

Таким образом, для соединительной трубы 3 уравнение (6.65) заменяем соотношением

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (6.75)$$

а из (6.66) после интегрирования по длине и пренебрежения потерями на трение, получаем

$$\frac{dQ_3}{dt} = b(p_1 - p_2), \quad (6.76)$$

где

$$b = \frac{\omega_3}{\rho L_3}. \quad (6.77)$$

Система уравнений (6.72), (6.73), (6.76) с начальными условиями

$$p_1(0) = p_{10}, p_2(0) = p_{20}, Q_3(0) = 0 \quad (6.78)$$

и дает приближенное описание изучаемого процесса.

Задача (6.72), (6.73), (6.76), (6.78) имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_{10} - (p_{10} - p_{20}) \cdot a_{10} \frac{1 - \cos t \sqrt{(a_{10} + a_{20})b}}{a_{10} + a_{20}}, \\ p_2(t) &= p_{20} + (p_{10} - p_{20}) \cdot a_{20} \frac{1 - \cos t \sqrt{(a_{10} + a_{20})b}}{a_{10} + a_{20}}, \\ Q_3(t) &= (p_{10} - p_{20}) \cdot \sqrt{\frac{b}{a_{10} + a_{20}}} \sin t \sqrt{(a_{10} + a_{20})b}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

При исходных данных (6.70) решение (6.79) дает следующие результаты:

период колебаний  $T = 2\pi / \sqrt{(a_{10} + a_{20})b} \approx 0,2778 \text{ сек}$ ,

$p_{1 \max} = 16,6 \text{ МПа}$ ;  $p_{1 \min} = 9,17 \text{ МПа}$ ;  $p_{2 \max} = 25,67 \text{ МПа}$ ;  $p_{2 \min} = 0,1 \text{ МПа}$ ;

$|Q_3|_{\max} = 143 \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $|V_3|_{\max} = 137,5 \text{ м/с}$ .

Зависимости (6.79) с исходными данными (6.70) качественно и количественно хорошо согласуются с результатами счета на ЭВМ по схеме гидравлического удара.

## 6.8 Заключение

На основании результатов расчетов можно сделать вывод, что модели с сосредоточенными параметрами в целом улавливают основные характерные черты описываемых процессов. Что касается количественного совпадения, то, конечно, имеются искажения как по амплитуде, так и по частоте, особенно для высокоинтенсивных процессов типа прямого гидравлического удара. Однако чем менее интенсивен нестационарный процесс, тем больше степень согласования. Более того, есть основания полагать, что при применении моделей с сосредоточенными параметрами к системам трубопроводов степень

согласования будет еще большей ввиду того, что погрешности для различных труб будут в сумме частично компенсировать друг друга.

Итак, модели с сосредоточенными параметрами, являясь более экономичными, чем модели с распределенными параметрами, в большинстве из рассматриваемых случаев достаточно адекватно описывают основные параметры нестационарных процессов в гидросистемах.

## ГЛАВА 7. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### 7.1. Роль имитационного моделирования

Рассмотрим подход, основанный на имитационном моделировании, на примере систем автоматического регулирования.

Обеспечение требуемой стабильности и эффективное управление современными трубопроводными системами немислимо без применения систем автоматического регулирования и управления, являющихся, в общем случае, подсистемами трубопроводной системы. Таковыми являются, например, различные дроссели-регуляторы, поддерживающие заданное давление или расход в определенных точках системы. От функционирования систем автоматического регулирования во многом зависит эффективность работы системы в целом, в том числе в экстремальных и аварийных ситуациях.

Для того чтобы правильно оценить результаты воздействия исполнительных звеньев регулирующих устройств на функционирование системы в целом, необходимо иметь адекватную модель работы устройств регулирования и управления.

Наиболее достоверные результаты может дать моделирование полной системы, в которую системы автоматического регулирования входят в качестве отдельных подсистем. Однако моделирование в целом требует значительных вычислительных и математических ресурсов. Поэтому существенной является проблема декомпозиции системы, то есть, исследования подсистем (в частности, систем автоматического регулирования) независимо друг от друга, но с учетом их взаимодействия с общей системой.

Модель работы узла регулирования может быть весьма сложной (такой узел может, в свою очередь, представлять собой сложную систему); трубопроводная система может содержать большое количество таких, часто однотипных, узлов регулирования. Варьируя значения входных параметров в заданном диапазоне, можно получить функцию отклика системы

регулирования на возможные возмущения. Далее, при анализе внешней системы, вместо модели данного узла регулирования можно пользоваться уже этой функцией, имитирующей реакцию узла управления на различные внешние возмущения. Таким образом, задача анализа работы сложной системы разбивается на две более простые стадии: сначала отдельно имитируются возмущающие воздействия на отдельные узлы системы (узлы регулирования и управления), а затем полученные интегральные характеристики реакции испытываемого узла закладываются в качестве упрощенной модели этого узла в составе рассматриваемой системы.

## 7.2. Декомпозиция системы

Выделить "в чистом виде" реакцию системы регулирования и управления на внешние возмущения бывает затруднительно, потому что результирующий нестационарный процесс представляет собой сумму возмущения, возникшего в системе, реакции на это возмущение системы автоматического регулирования и отклика со стороны внешней части системы на эту реакцию. Рассматривая систему в целом, зачастую не удается определить, какое влияние каждая из составляющих системы оказывает на ее работу. Отсюда возникает потребность в декомпозиции системы, выделения, в частности, объекта регулирования и самого регулятора в отдельную подсистему, рассматриваемую автономно от остальной системы. На рис.7.1 а) показан узел управления  $CU$  как часть системы  $S$ ; на рис.7.1 б) представлена схема декомпозиции, при которой выделяются как отдельные системы узел управления  $CU$  и остальная часть системы  $S'$  (в качестве объекта управления). Для завершения декомпозиции параметры взаимодействия между  $CU$  и  $S'$  (на рис.7.1 б) показаны стрелками) необходимо разделить на входящие и выходящие сигналы.

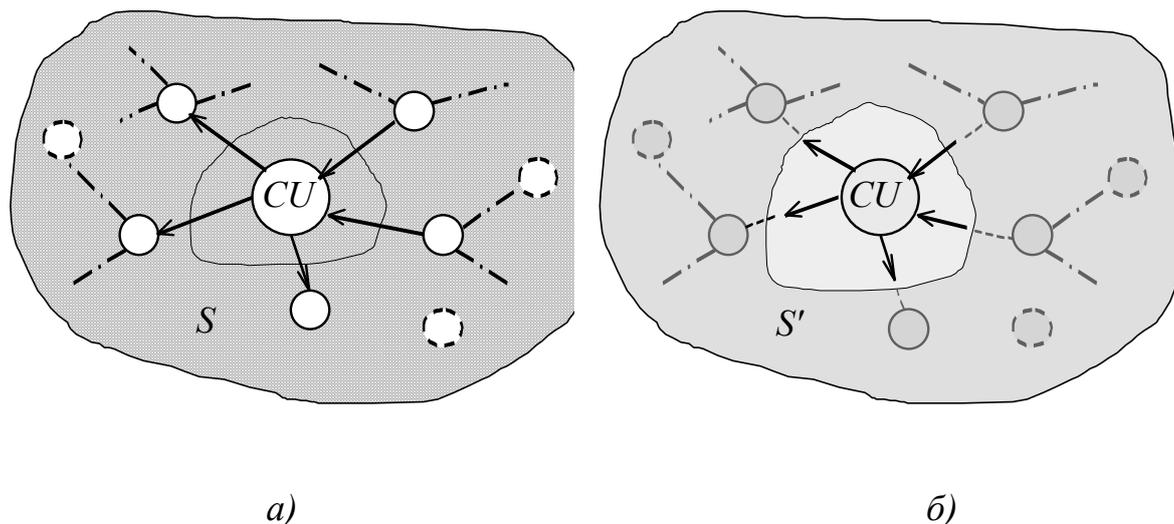


рис.7.1

- а) Схема системы  $S$  с узлом управления  $CU$ ;  
 б) Схема декомпозиции системы.

Здесь  $CU$  рассматривается как отдельная система,  $S'$  – оставшаяся часть системы.

### 7.3. Математический испытательный стенд

В трубопроводных системах "естественные" физические параметры  $p$  и  $Q$ , будучи параметрами единого гидродинамического процесса, являются суммой результата работы системы регулирования  $CU$  и реакции на это остальной части системы. Так как процесс распространения возмущений является по своей природе гиперболическим, "естественные" параметры процесса являются комбинацией приходящего возмущения и отраженного сигнала, которые распространяются вдоль соответствующих входящих и выходящих характеристик. В этом случае можно описать приходящие и выходящие сигналы как приходящие и выходящие инварианты Римана (см. раздел 2) [137].

Можно считать, что рассматриваемый узел управления  $CU$  как бы извлечен из системы и помещен на испытательный стенд, где возмущения, поступающие из внешней части системы  $S'$ , заменяются приходящими инвариантами Римана. Это даёт основание назвать такой подход "математическим испытательным стендом" [165, 216].

#### 7.4. Система автоматического регулирования давления в обратной магистрали сети теплоснабжения

В качестве примера применения вышеизложенной методики рассмотрим расчет работы клапана регулировки давления в тепловой сети. Система регулировки подобного рода является достаточно распространенным и типичным представителем систем автоматического регулирования в трубопроводных системах.

Схема узла регулирования представлена на рис.7.2. Узел расположен на всасывающей линии насосов перекачивающей насосной станции (ПНС) на обратной магистрали, идущей от потребителя. Целью регулирования является поддержание постоянного давления  $p_{рег} = 1,3 \text{ ати}$  в точке  $A$  на всасывающем патрубке насоса. Положительное направление оси  $x$  принято от точки  $A$  к  $B$ , через  $Q$  обозначен расход, проходящий через узел регулирования, через  $p_A, r_A$  и  $p_B, s_B$  обозначены давления и инварианты в точках  $A$  и  $B$ , соответственно. Исполнительным механизмом является регулирующий клапан  $PK-1$  с  $d_y = 700 \text{ мм}$ . Работой клапана  $PK-1$  управляет реле давления  $РД-3а$ , которое реагирует на изменение давления в точке  $A$ .

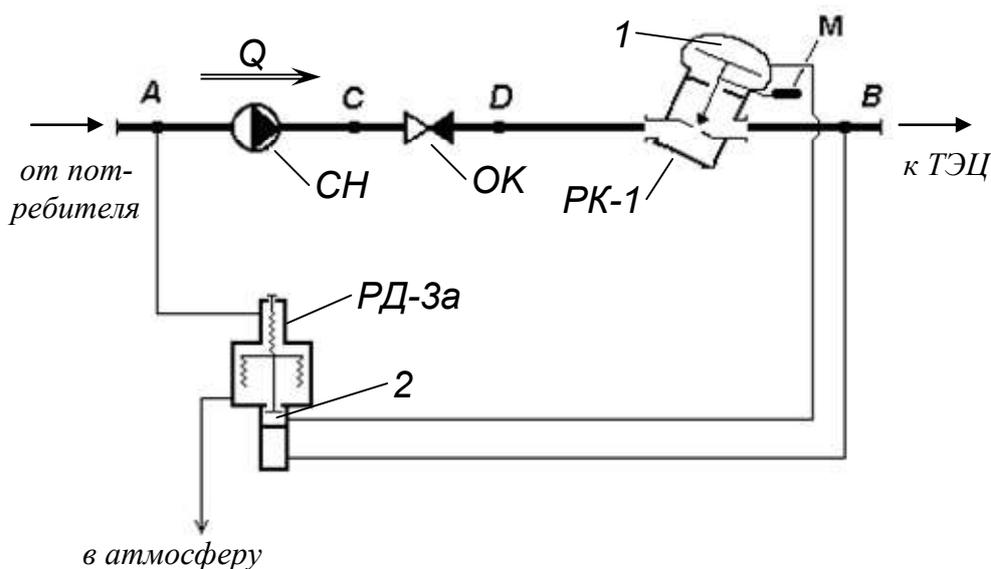


рис.7.2. Схема системы автоматического регулирования давления.

При  $p_A = p_{рег}$  вся система автоматики находится в равновесии. Если давление в точке  $A$  падает, то равновесие нарушается – давление в импульсной камере уменьшается, шток  $РД-3а$  под воздействием пружины перекрывает верхнее сопло и высокое давление, передающееся из точки  $B$  в полость  $1$ , начинает перемещать вниз шток регулирующего клапана (РК), уменьшая расход через него и увеличивая его сопротивление. В результате этого  $p_A$  начинает увеличиваться, а расход  $Q$  уменьшаться.

При повышении  $p_A$  перекрывается нижнее сопло  $РД-3а$ , прекращается доступ высокого давления в управляющую полость  $2$  и полость  $1$ , и полость  $1$  соединяется со сливом. Происходит слив воды из полости  $1$  в атмосферу, и шток регулирующего клапана перемещается вверх, уменьшая сопротивление клапана и увеличивая расход  $Q$  через него. Вследствие этого давление в точке  $A$  падает.

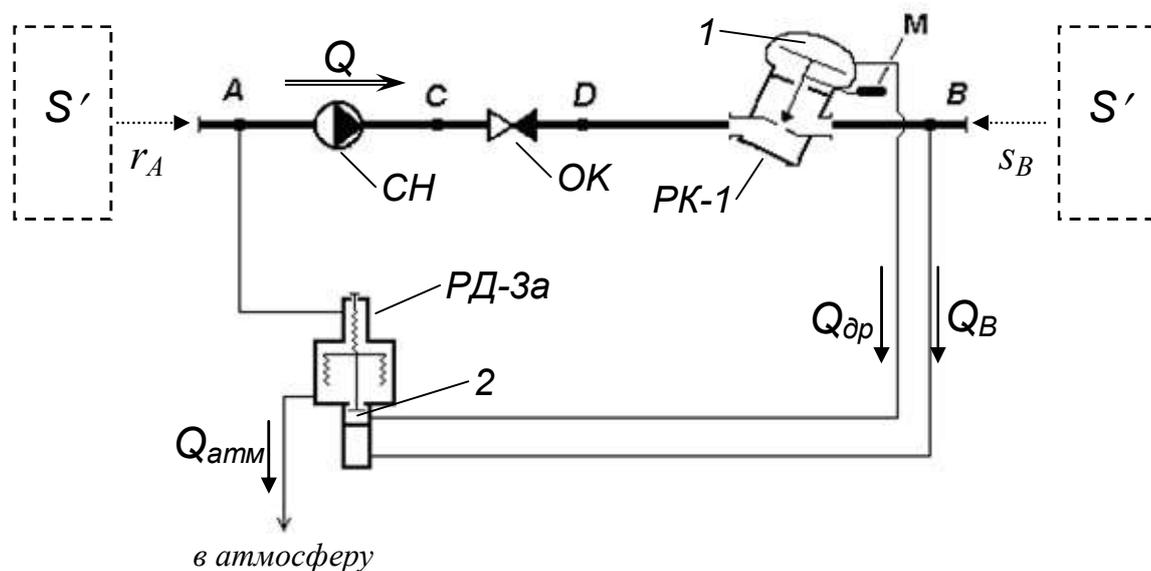


рис.7.3.

Отметим, что мы не можем задать, например, возмущение давления или расхода как произвольную функцию времени, т.к. величины  $p_A$ ,  $p_B$  и  $Q$  зависят друг от друга. Однако можно задать в качестве входного возмущения их комбинацию в виде инвариантов  $r$  и  $s$ , поступающих от внешней части

трубопроводной системы  $S'$ , как показано на рис.7.3, где инварианты Римана определяются как

$$r = \left( p + \rho c \frac{Q}{\omega} \right) / 2, \quad s = \left( -p + \rho c \frac{Q}{\omega} \right) / 2. \quad (7.1)$$

Здесь  $c$  – скорость распространения волны возмущения,  $\rho$  – плотность жидкости;  $\omega$  – площадь сечения трубопровода ( $\omega_A$  – для подходящего трубопровода,  $\omega_B$  – для отводящего трубопровода).

“Естественные” физические переменные выразятся через  $r$  и  $s$  следующим образом:

$$p = r - s, \quad Q = \frac{\omega(r + s)}{\rho c}. \quad (7.2)$$

Таким образом, внешние возмущения можно задавать в виде известных функций  $r_A = r_A(t)$ ,  $s_B = s_B(t)$ . Не умаляя принципиально общности, можно задавать возмущение только в одной точке, например, в  $A$ , считая сигнал, приходящим в точку  $B$ , постоянным:

$$r_A = \varphi(t), \quad s_B = const, \quad (7.3)$$

т.е. на выходе регулирующего клапана задается невозмущенное состояние.

### 7.5. Математическая модель системы регулирования

Математическая модель системы регулирования представляет собой комбинированную систему нелинейных алгебраических уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений, которая включает в себя: уравнения, описывающие протекание жидкости по тракту регулировки  $A - B$  с учетом работы насоса, переменного сопротивления РК-1 и других местных сопротивлений; уравнения динамики перемещения штока клапана; уравнения, описывающие динамику протекания жидкости по внутренним трубам системы регулировки при взаимодействии с РД-3а.

#### 7.5.1 Принятые допущения.

В основу математической модели системы автоматического регулирования давления были положены следующие допущения:

- Учитываются упругие свойства полости 4 клапана РК-1 и находящейся в ней жидкости;
- Учитывались инерционные свойства жидкости в соединительных трубопроводах системы регулировки;
- Режим движения жидкости в модельной системе принимался турбулентным;
- Полагается, что частота вращения насосов СН во время переходного процесса постоянна.

### 7.5.2 Динамика потоков жидкости в трубах системы регулировки

Перепад давления между точками  $A$ ,  $C$ ,  $D$  и  $B$  соответственно описывается системой уравнений:

$$p_A - p_C = -f(Q) + \rho \frac{l_{AC}}{\omega} \frac{dQ}{dt} + \xi_{ch} |Q|Q \quad (7.4)$$

$$p_C - p_D = \xi_{ok} |Q|Q + \rho \frac{l_{CD}}{\omega} \frac{dQ}{dt} \quad (7.5)$$

$$p_D - p_B = \xi_{kr} |Q|Q + \rho \frac{l_{BD}}{\omega} \frac{dQ}{dt}. \quad (7.6)$$

где  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$ ,  $p_D$  – давление в соответствующих точках;  $\xi_{ok}$  – сопротивление обратного клапана ОК;  $l_{AC}$ ,  $l_{CD}$ ,  $l_{BD}$  – длины участков между соответствующими точками. Здесь  $f(Q)$  – характеристика сетевых насосов СН, которая задается в виде

$$f(Q) = -a_{ch} Q^2 + b_{ch} Q + c_{ch}, \quad (7.7)$$

где  $a_{ch}$ ,  $b_{ch}$ ,  $c_{ch}$  – коэффициенты, характеризующие рабочий режим насоса ([179]).

Переменное сопротивление клапана регулировки  $\xi_{kr}$  задается в виде функции относительного хода штока клапана  $x_{kr}$ :

$$\xi_{kr} = \xi_{kr}^n \left( \frac{x_{kr}^{\max}}{x_{kr}} \right)^N, \quad (7.8)$$

где  $\xi_{kr}^n$  – сопротивление клапана регулировки при полном открытии;  $x_{kr}^{\max}$  – максимальный ход клапана регулировки;  $N$  – эмпирическая константа.

Используя соотношение (7.8), уравнение (7.6) можно записать в виде

$$\eta^{2\alpha} (p_D - p_B) = \xi_{kr}^n |Q|Q + \rho \frac{l_{BD}}{\omega} \frac{dQ}{dt} \eta^{2\alpha}. \quad (7.9)$$

где  $\alpha = N/2$  – эмпирическая константа,  $\eta$  – относительный ход клапана

$$\eta = \frac{x_{kr}}{x_{kr}^{\max}}. \quad (7.10)$$

Величина  $\eta$  имеет естественные ограничения:

$$0 \leq \eta \leq 1. \quad (7.11)$$

Течение жидкости через соединительные трубопроводы по линиям полость 1 – полость 2, точка B – полость 2 и через дренажный патрубок, описываются, соответственно, следующими уравнениями:

$$p_1 - p_2 = \xi_{op} |Q_{op}|Q_{op} + \rho \frac{l_{op}}{\omega_{op}} \frac{dQ_{op}}{dt}, \quad (7.12)$$

$$p_B - p_2 = \xi_B |Q_B|Q_B + \rho \frac{l_B}{\omega_B} \frac{dQ_B}{dt}, \quad (7.13)$$

$$p_2 - p_{атм} = \xi_{сл} |Q_{атм}|Q_{атм} + \rho \frac{l_{атм}}{\omega_{атм}} \frac{dQ_{атм}}{dt}, \quad (7.14)$$

где  $p_2$  – давление в полости 2 реле давления PSR;  $\xi_{op}$ ,  $\xi_B$ ,  $\xi_{сл}$  – сопротивления дренажной линии полость 1 – полость 2, нагнетательной линии точка B – полость 2 и сливной линии полость 2 – атмосфера.

Здесь  $Q_{op}$ ,  $Q_B$ ,  $Q_{атм}$  – расходы на соответствующих линиях, при этом

$$Q_{op} + Q_B = Q_{атм}, \quad (7.15)$$

### 7.5.3 Уравнения динамики клапана

Уравнения динамики штока клапана имеют вид:

$$M_{eq} \frac{d^2 x_{kr}}{dt^2} = S_m (P_{атм} - P_1) + S_z (P_d - P_b) - F_{tr} + F_{gr}; \quad (0 \leq x \leq x_{kr}^n), \quad (7.16)$$

где  $M_{eq}$  – эквивалентная масса движущихся частей клапана (золотника, штока, мембраны, противовеса);  $S_m$  – эффективная площадь мембраны;  $S_z$  – площадь золотника;  $F_{tr}$  – сила "сухого" трения в сальниковом уплотнении при движении штока;  $F_{gr}$  – сила противовеса.

Изменение давления жидкости  $p_1$  в полости  $I$  зависит от хода клапана, упругих свойств полости и находящейся в ней жидкости и оттока  $Q_{op}$  следующим образом:

$$\frac{W_1}{E} \frac{dP_1}{dt} = \frac{\pi D_0^2}{4} \frac{dx_{kr}}{dt} - Q_{op}, \quad (7.17)$$

где  $E$  – интегральный модуль упругости полости 1 и находящейся в ней жидкости;  $W_1$  – объем полости 1 клапана.

На решение уравнений (7.16) и (7.17) накладывается естественное ограничение (7.11).

#### 7.5.4 Модель управляющего звена

В основу модели работы реле давления положена гипотеза о линейной зависимости проводимостей в полости 2 от изменения давления  $p_A$ . Сопротивление сливной линии (полость 2 – атмосфера) будем находить из формулы:

$$\frac{1}{\xi_{сл}} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{reg} - \Delta \geq P_A; \\ \frac{1}{\xi_0} \frac{P_A - P_{reg} + \Delta}{2\Delta}, & \text{если } P_{reg} - \Delta \leq P_A \leq P_{reg} + \Delta; \\ 1/\xi_0, & \text{если } P_{reg} + \Delta \leq P_A; \end{cases} \quad (7.18)$$

где  $\xi_0$  – сопротивление сливной линии при полностью открытом клапане РД-3а;  $\Delta$  – точность регулирования.

Сопротивление нагнетательной линии (точка В – полость 2) будем находить из формулы:

$$\xi_B = \begin{cases} \xi_B^0, & \text{если } P_{reg} - \Delta \geq P_A; \\ \frac{1}{\xi_B^0} \frac{P_{reg} - P_A + \Delta}{2\Delta}, & \text{если } P_{reg} - \Delta \leq P_A \leq P_{reg} + \Delta; \\ 0, & \text{если } P_{reg} + \Delta \leq P_A; \end{cases} \quad (7.19)$$

где  $\xi_B^0$  – сопротивление нагнетательной линии при полностью открытом клапане.

#### 7.6 Методика и результаты расчетов

### 7.6.1 Методика расчетов

Итак, моделирование работы системы регулировки давления сводится к решению системы уравнений (7.3) – (7.19) при заданных внешних возмущениях (7.3). В начальный момент времени система находится в равновесии. Расчеты производились численным методом. Ось времени разбивалась на шаги с постоянным шагом по времени, при этом все обыкновенные дифференциальные уравнения аппроксимировались по неявной разностной схеме. Далее, если линеаризовать все нелинейности в уравнениях (7.3) – (7.19), то получается система линейных уравнений, решение которых не представляет труда. Таким образом, можно находить значения искомых величин на новом шаге по времени, и переходить к следующему шагу.

Однако ввиду наличия особых точек при работе клапанов (полное закрытие) и ограничений (полное открытие клапана) такая схема дает очень сильные счетные возмущения при приближении к особым точкам. Поэтому, следует избегать линеаризации при квадратичных членах, особенно при переменных сопротивлениях клапанов. В этом случае решаемая на каждом шаге система уравнений сводится к системе квадратных уравнений относительно расходов  $Q$ ,  $Q_{op}$ ,  $Q_B$ , найдя которые, легко определить и остальные параметры процесса. Такой метод решения устойчив относительно моментов закрытия и открытия клапанов.

### 7.6.2 Результаты расчетов

Указанная методика позволяет задавать произвольные возмущения на входе системы регулирования и наблюдать за реакцией на них системы. В качестве примера рассмотрим возмущение в виде сглаженного ступенчатого импульса с амплитудой  $A_{imp}$  и крутизной фронта возмущения  $V_{imp} = A_{imp}/t_{imp}$ , где  $t_{imp}$  – длительность нарастания импульса (см. рис.7.4).

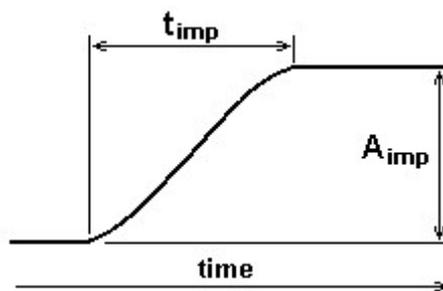


рис.7.4. Форма возмущения.

На рис.7.5 представлены результаты расчетов в виде функции отклика системы регулирования  $t_{resp} = t_{resp}(A_{imp}, V_{imp})$  на возмущение. Функция показывает, сколько времени необходимо системе для восстановления регулируемой величины в заданных пределах регулирования. По оси  $y$  отложена амплитуда возмущения в долях от невозмущенного сигнала на входе, по оси  $x$  отложена крутизна возмущения в  $1/сек$ , и по оси  $z$  – время реакции системы в секундах.

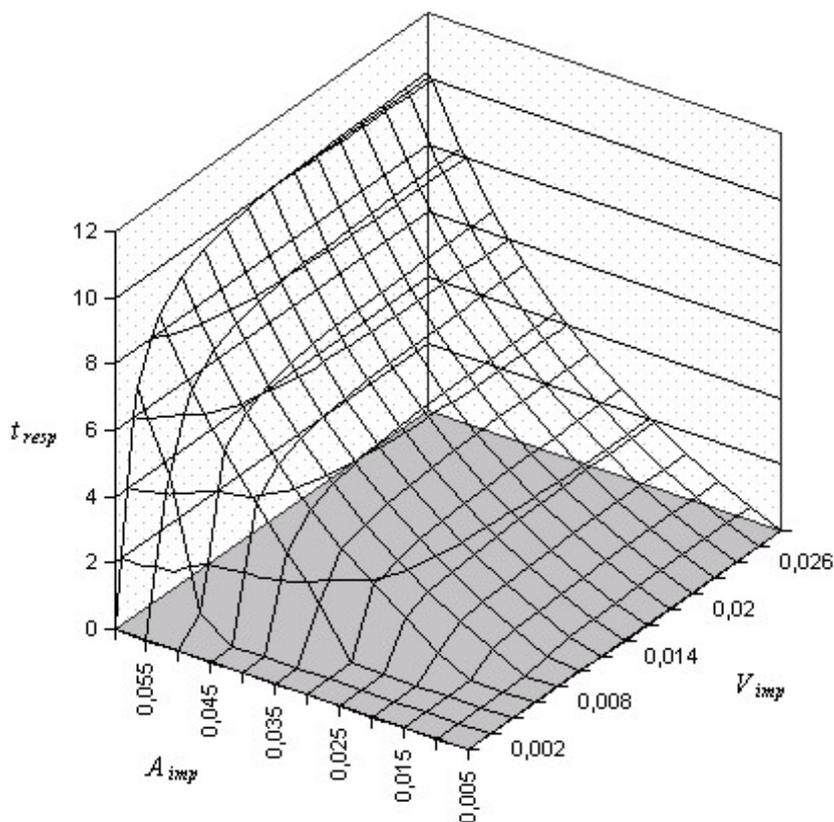


рис.7.5 Поверхность функции отклика.

Из рис.7.5 видно, что при крутом фронте возмущения время реакции системы зависит практически только от амплитуды. При малой крутизне возмущения  $t_{resp} = 0$ , т.е. система удерживает регулируемый параметр в заданных пределах в течение всего процесса. И лишь при промежуточных значениях  $V_{imp}$  время реакции системы  $t_{resp}$  зависит как от амплитуды, так и от крутизны возмущения.

### 7.7 Автоматическое регулирование температуры в системах водоподготовки

Схема узла подогрева сырой воды представлена на рис.7.6. Здесь через  $S_1$  и  $S_2$  обозначены внешние части трубопроводной системы.

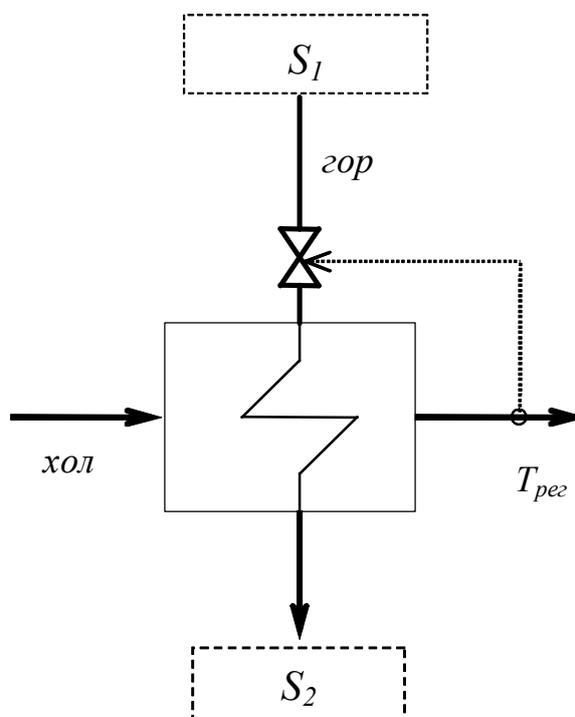


рис.7.6 Схема узла подогрева сырой воды.

#### 7.7.1 Модель работы регулировочного клапана

Схема регулировочного клапана, выделенная из общей схемы рис.7.6, представлена на рис.7.7.

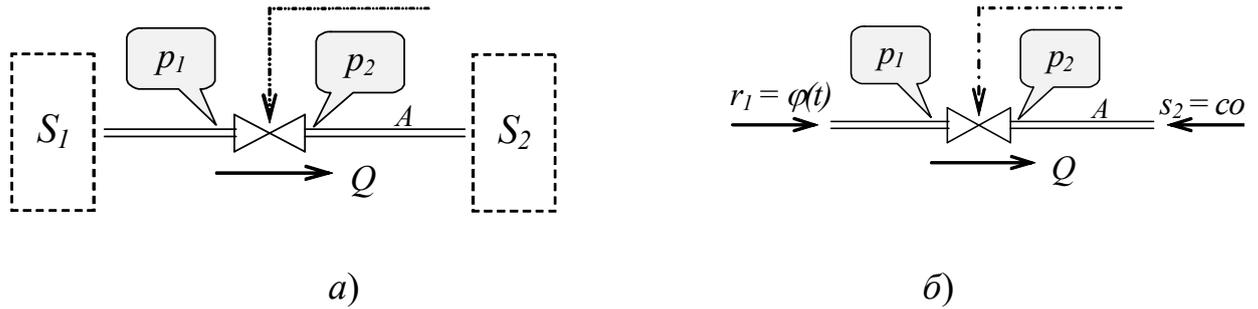


рис.7.7

Пусть  $\eta$  – относительный ход клапана (7.10), тогда, аналогично (7.9), уравнение потерь напора на клапане можно записать в виде

$$\eta^{2\alpha} \cdot (p_1 - p_2) = \zeta_0 \frac{\rho |Q| Q}{2S_{np}^2} = \xi_0 |Q| Q, \quad (7.20)$$

где  $\xi_0$  – сопротивление клапана в полностью открытом состоянии,  $S_{np}$  – площадь проходного сечения клапана,  $\rho$  – плотность жидкости.

Аналогично предыдущему случаю, будем моделировать, возмущения, приходящие от внешних частей системы  $S_1$  и  $S_2$  инвариантами Римана  $r$  и  $s$  (см. (2.36)).

Аналогично (7.3), будем задавать возмущение на входе регулирующего клапана в виде  $r_1 = \varphi(t)$ , а возмущение, приходящее от  $S_2$ , полагаем постоянным.

Решая совместно (7.20) и (7.3), получаем уравнение для определения  $Q$  в зависимости от приходящих возмущений

$$Q = \frac{4\eta^\alpha (\varphi(t) + s_2)}{\Omega \eta^\alpha + \sqrt{\Omega^2 \eta^{2\alpha} + 8\xi_0 |\varphi(t) + s_2|}}, \quad (7.21)$$

где

$$\Omega = \frac{\rho c_1}{\omega_1} + \frac{\rho c_2}{\omega_2}, \quad (7.22)$$

### 7.7.2 Модель подогревателя

Работу подогревателя будем описывать уравнением

$$\theta_T \frac{dT}{dt} + T = f(Q_{гор}, T'_{гор}, Q_{хол}, T'_{гор}), \quad (7.23)$$

где

$$f(Q_{гор}, T'_{гор}, Q_{хол}, T'_{хол}) = T'_{хол} + (T'_{гор} - T'_{хол}) \frac{W_{гор}}{W_{хол}} \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{W_{гор}}{W_{хол}}\right) \frac{kF}{W_{хол}}}}{1 - \frac{W_{гор}}{W_{хол}} e^{-\left(1 - \frac{W_{гор}}{W_{хол}}\right) \frac{kF}{W_{хол}}}} \quad (7.24)$$

Здесь

$$W_{гор} = \rho_{гор} C_{p,гор} Q_{гор}, \quad W_{хол} = \rho_{хол} C_{p,хол} Q_{хол}, \quad (7.25)$$

где  $\rho$  – плотность,  $Q$  – объёмный расход,  $C_p$  – теплоемкость, соответственно; индексы «гор» или «хол» отмечают принадлежность к горячей или холодной воде.

### 7.7.3 Модель ПИД-регулятора с инерционностью

Работу пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регулятора [42, 140] с инерционностью будем описывать уравнением:

$$\theta_m \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{d\eta}{dt} = k_p \left( \frac{dT}{dt} + \frac{T - T_{pez}}{t_u} + t_d \frac{d^2 T}{dt^2} \right), \quad (7.26)$$

где  $k_p$  – коэффициент пропорциональности;  $t_u$  – постоянная интегрирования;  $t_d$  – постоянная дифференцирования;  $\theta_m$  – постоянная времени, характеризующая инерционные свойства регулятора.

### 7.8 Результаты расчета.

Результаты расчета реагирования системы на возмущение гидродинамических характеристик потока представлены на рис.7.8 – рис.7.12.

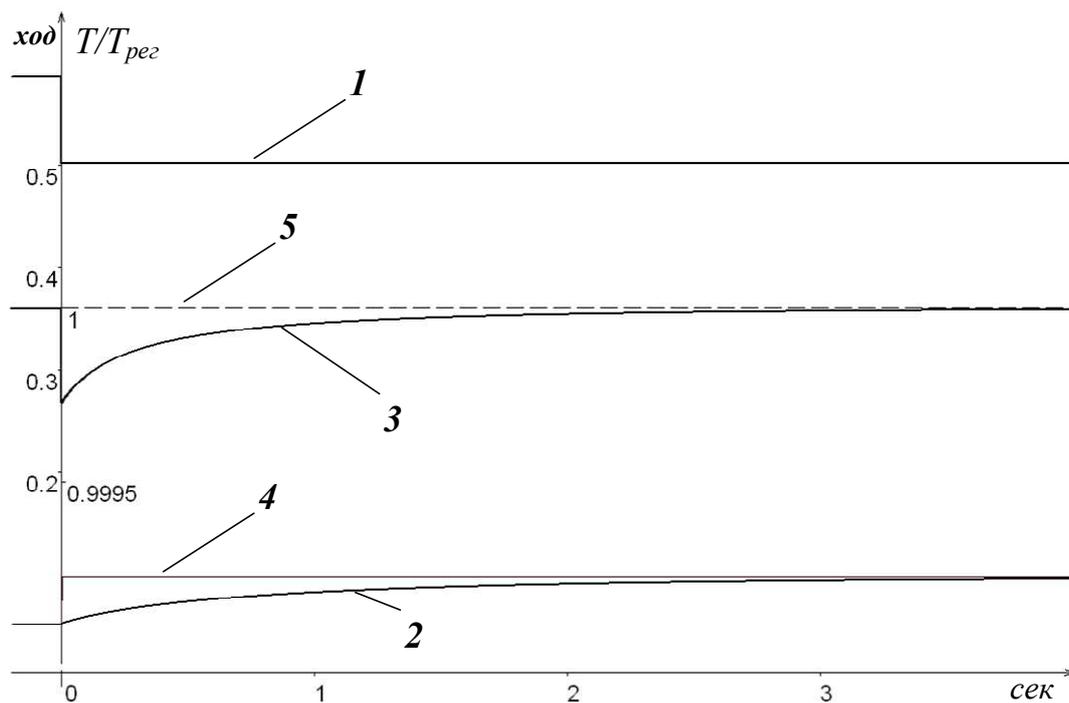


рис.7.8 Реакция системы регулирования на ступенчатое возмущение. 1 – возмущение; 2 – ход клапана регулирования; 3 – температура на выходе; 4 – «идеальный» ход клапана регулирования; 5 – установочная температура.

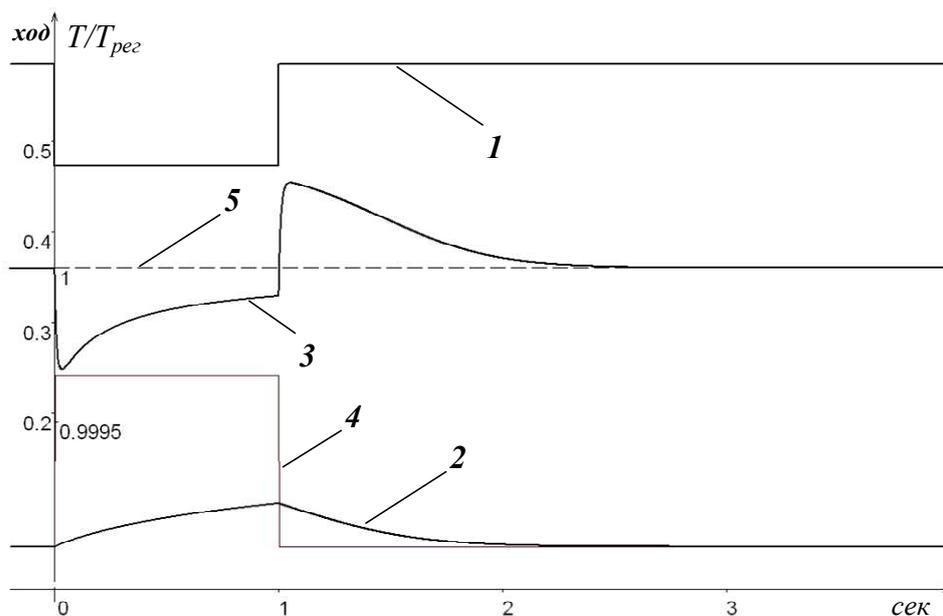


рис.7.9 Реакция системы регулирования на прямоугольный импульс возмущения. Обозначения те же.

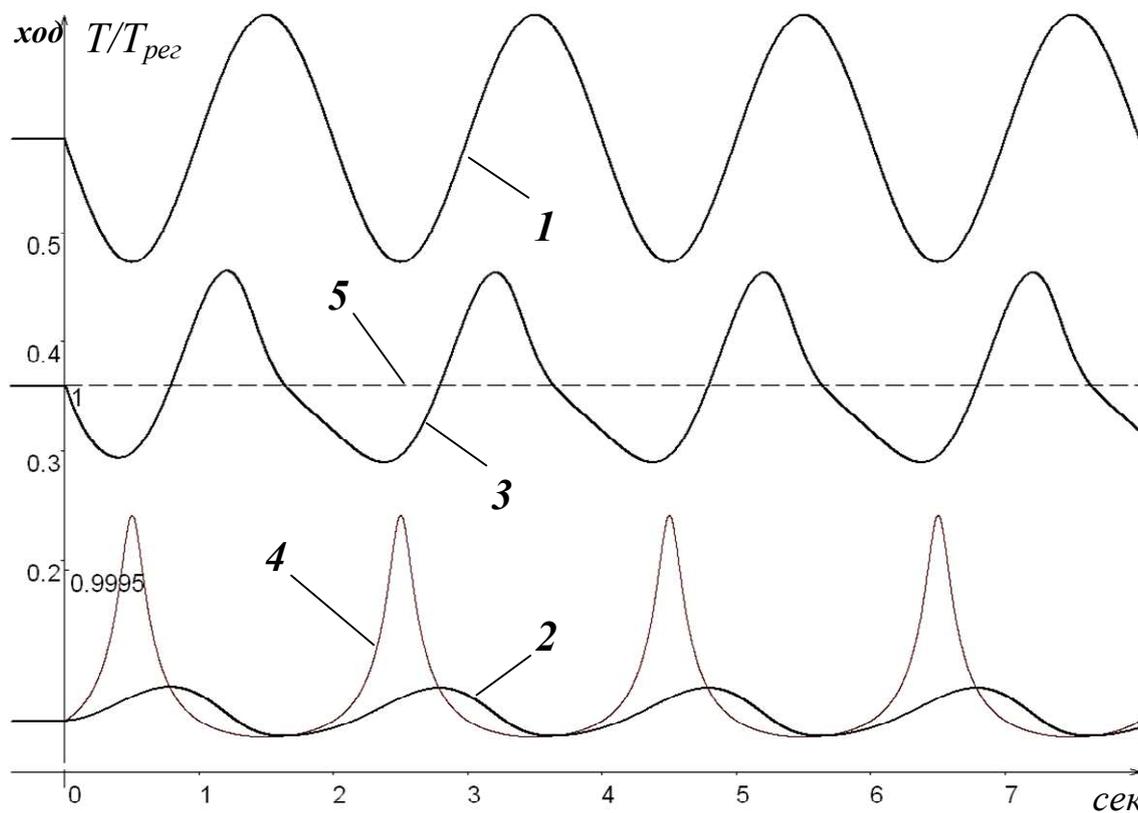


рис.7.10 Реакция системы регулирования на синусоидальное возмущение. Обозначения те же.

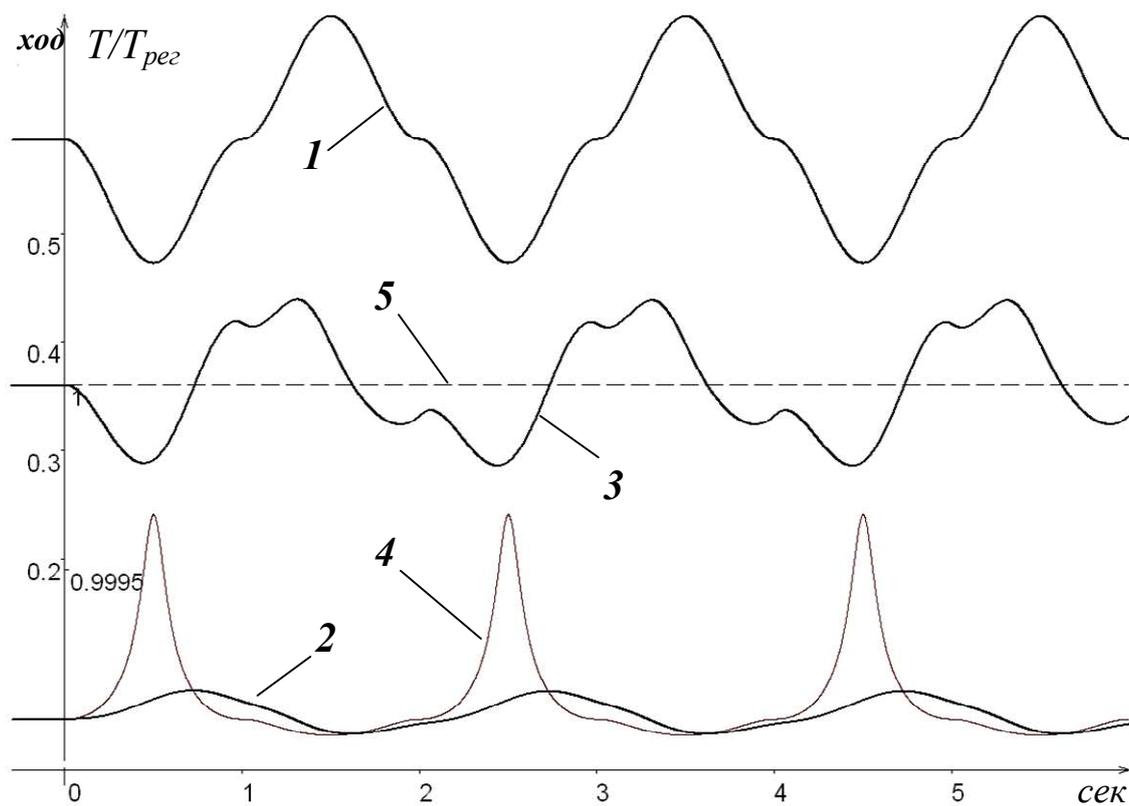


рис.7.11 Реакция системы регулирования на периодическое возмущение.  
Обозначения те же.

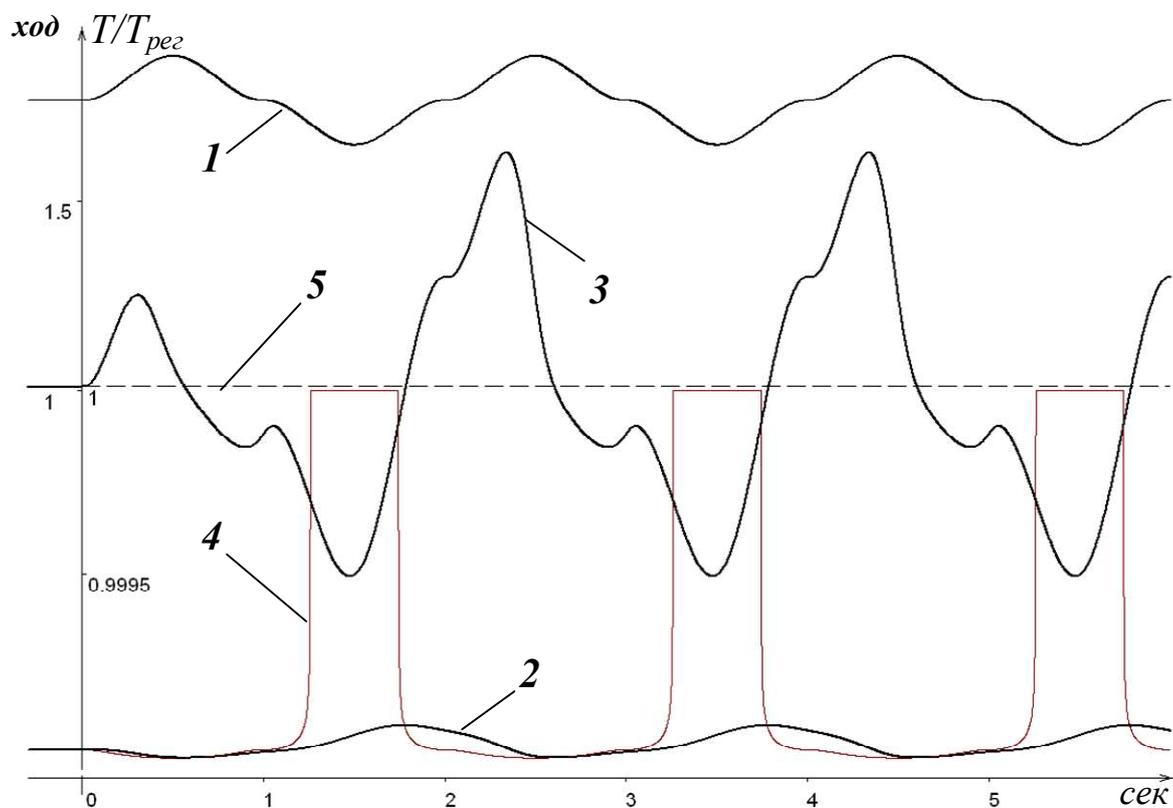


рис.7.12 Реакция системы регулирования на периодическое возмущение  
большой интенсивности. Обозначения те же.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, можно сделать следующие выводы.

1. Математическая постановка задача формулируется в достаточно общем виде как смешанная задача для гиперболических дифференциальных уравнений гидравлического удара, определенных на графе. Используя аппарат теории графов, легко описываются трубопроводные сети произвольной структуры.
2. Трубопроводная система структурируется на трубы и узлы. Потoki в трубах характеризуются двумя (например, давление и скорость) или тремя (давление, скорость, температура) физическими параметрами. Для узлов, помимо этих физических параметров, могут быть определены дополнительные собственные параметры узла (например, число оборотов насоса, ход клапана и др.). В узлах задаются краевые (граничные) условия, которые подразделяются на условия подхода (трубы к узлу) и уравнения узла, где, в частности, задействованы и собственные параметры узла. Такая методология позволяет задавать граничные условия в достаточно общем виде.
3. Использование математической постановки задачи в достаточно общей форме поддерживает распространённую с настоящее время объектно-ориентированную парадигму [25] и позволяет легко выстраивать технологическую цепочку «объект исследования – математическая модель – методика расчета – разработка программного обеспечения», облегчая разработку современных высокоэффективных программных продуктов.
4. Рассмотренная задача о гидравлическом ударе в коаксиальных трубопроводах описывается связной системой четырёх уравнений. Показало, что данная система относится к гиперболическому типу; для упрощённой системы уравнений (без конвективных членов) удалось выразить скорости распространения возмущений в явном виде. В данном

случае возмущение будет распространяться не с двумя скоростями (прямая и обратная волны), а с четырьмя, т.е. будут существовать четыре различных волны гидравлического удара. Причем две из них будут распространяться вдоль по потоку (прямые волны), и две – против потока (обратные волны).

5. К достоинствам применяемого математического описания следует отнести широкое применение инвариантов Римана, которые можно трактовать как «образ» волн, или, в другой интерпретации – как «сигналы». Таким образом, наряду с «натуральными» переменными (например, давление  $p$  и скорость  $V$ ), используется «волновой подход» (волны – инварианты  $r$  и  $s$ ). Граничные условия, переформулированные в терминах  $r$  и  $s$ , можно трактовать как условия отражения волн.
6. В рамках общей математической постановки задачи предложены математические модели работы различного гидравлического оборудования: соединение труб, компенсатор, уравнильный резервуар, местное сопротивление, обратный и предохранительный клапаны, насосы (центробежный и объёмный), потребитель тепловой сети, и т.д. Математические описания работы этих узлов сделаны в рамках вышеупомянутой объектно-ориентированной парадигмы; т.е. легко выделяются «базовые», «родительские» классы (например, местное сопротивление), на основе которых строятся «дочерние» типы (регулируемое местное сопротивление, фильтр, предохранительный клапан и т.п.). Такой подход, во-первых, позволяет легко наращивать «библиотеку граничных условий» в зависимости от конкретных задач и появления новых типов устройств, а во-вторых, поддерживает и облегчает программную реализацию.
7. Дальнейшее развитие получила теория кавитирующего гидравлического удара. Явление разрыва сплошности потока рассмотрено на модели простого наклонного трубопровода. Критерием возникновения полостей

(каверн) в потоке служит падение давления до давления насыщенных паров жидкости. Оценивалось влияние наклона трубопровода, трения о стенки, начальной скорости на возникновение и развитие кавитации. Установлено, что распространённая модель «отрыва» столба жидкости («column separation») является не совсем точной. Помимо одной «большой» каверны, занимающей всё поперечное сечение потока, образуется ещё зона обширной (мелкопузырьковой или плёночной) кавитации, распространяющейся по потоку. Единичная каверна теоретически возможна только при нулевом уклоне, и только для идеальной жидкости. Наличие трения также способствует возникновению обширной зоны мелкопузырьковой кавитации.

8. Оценены параметры возникающей кавитации – время и месторасположение каверн, момент схлопывания каверн, распределение давления в потоке после схлопывания каверн и зона максимального давления. Определены параметры не только первичной, но и вторичной кавитации (в последующей, второй фазе понижения давления). Оценены максимальные давления, время существования каверн, момент и точка возникновения и момент схлопывания в этом случае.
9. Оценено влияние трения на гидравлический удар с разрывом сплошности потока. Трение слабо влияет на максимальную величину гидравлического удара при сплошном течении (справедлива формула Н.Е.Жуковского), но с возникновением разрыва сплошности потока фактор трения становится более весомым. Получена формула, оценивающая весьма точно максимальное давление при гидравлическом ударе, сопровождающимся разрывом сплошности потока, и являющаяся обобщением известной формулы Н.Е.Жуковского.
10. Разработанные методы расчета, в отличие от весьма популярного до сих пор метода характеристик, используют явные и неявные схемы бегущего счета. Явные схемы бегущего счета хорошо отслеживают крутые волновые

фронты и хорошо подходят для расчета высокоинтенсивных процессов. Применение явной схемы порождает достаточно простой и ясный алгоритм расчета. К недостаткам этой схемы следует отнести ограничение на шаги счета. В качестве примера расчета именно такого процесса приведен расчет гидравлического удара в гидроприводе машины для литья под давлением, возникающего в системе при ударе пресс-поршня о жидкой металл.

Для расчета медленно протекающих слабоинтенсивных процессов предложена методика расчета по неявной схеме бегущего счета, позволяющая считать с любыми приемлемыми по точности шагами счета. Применение неявной схемы порождает весьма сложный алгоритм расчета. Другим недостатком этой схемы является то, что она при расчетах сильно сглаживает резкие фронты возмущений, поэтому хорошую точность даёт только при расчетах низкоинтенсивных, достаточно плавных процессов. В качестве примера приведён расчет нестационарного процесса в напорной оросительной сети, возникающий при медленном закрытии гидранта.

11. Значительной проблемой при расчетах по явной схеме (а также и по методу характеристик) является «проблема коротких труб», когда в трубопроводной системе наличествуют как «длинные», так и «короткие» трубы. Наличие «коротких» труб лимитирует допустимый шаг счета, что порождает неоправданно большое число шагов для длинных труб. Неявная схема свободна от этого недостатка.

Автором предложена комбинированная явно-неявная схема бегущего счета, которая на «длинных» трубах считает высокоэффективным явным методом, а на «коротких» – автоматически переходит на неявный счет. В качестве примера приводится расчет распространения и трансформаций возмущений в системе технологических трубопроводов АЭС.

12. Для расчета течений, сопровождающихся появлением разрыва сплошности применяется алгоритм, когда в каждую расчетную точку помещается

«вырожденная» каверна, которая начинает расти при достижении давления насыщенных паров жидкости. Процесс роста и схлопывания такой каверны определяется параметрами окружающей каверну жидкости. Кроме того, задаются ещё дополнительные комплекты граничных условий на случай возникновения каверны в узле.

13. На основе применения моделей с сосредоточенными параметрами предложен оригинальный подход к упрощению методики расчета нестационарных процессов в трубопроводных системах. Разработана методика построения «быстрых» моделей первого и второго порядка точности, позволяющих считать в сотни и более раз быстрее, чем «обычные» численные методы для уравнений гидравлического удара. Оценена точность и сфера применимости таких моделей. Описаны процедуры эквивалентизации больших трубопроводных систем. Используя эту методику, была проведена эквивалентизация части трубопроводной системы АЭС, что позволило значительно уменьшить объем вычислений при сохранении приемлемой точности. На примере специального испытательного стенда было показано, что модель гидравлического удара в данном случае, без особого ущерба для точности вполне может быть заменена системой обыкновенных дифференциальных уравнений на основе модели с сосредоточенными параметрами.
14. Предложенный оригинальный подход («математический испытательный стенд») является очень полезным и эффективным инструментом предварительных исследований, уточнения моделей и используемых параметров, и т.п. Этот подход опирается на трактовку входящих и выходящих инвариантов Римана как входящих и выходящих сигналов; он позволяет тестировать сложную трубопроводную систему «по частям». В качестве примеров приводятся расчеты системы автоматического регулирования давления в обратной магистрали сети теплоснабжения и узла автоматического регулирования температуры в системах

водоподготовки. Применяемый подход позволяет легко оценить время реакции устройства на возмущения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов Н.Н., Поспелова М.М., Сомов М.А. Расчет водопроводных сетей: Учеб. пособие для вузов / Абрамов Н.Н., Поспелова М.М., Сомов М.А. и др. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1983. – 278 с., ил.
2. Агапкин В.М., Кривошеин Б.Л., Юфин В.А. Тепловой и гидравлический расчеты трубопроводов для нефти и нефтепродуктов. – М.: Недра, 1981.
3. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. – М.: Недра, 1982. – 224 с., ил.
4. Альтшуль А.Д., Киселев Г.Г. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1975. – 274 с.
5. Андреев В.П., Сабинин Ю.А. Основы электропривода. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1956.
6. Андрияшев М.М. Гидравлические и тепловые расчеты водопроводных линий и сетей [Текст] / М.М.Андрияшев. – М.: Стройиздат, 1964. - 107 с. : черт.
7. Андрияшев М.М. Графические расчеты гидравлического удара в водоводах. – М.: Стройиздат, 1969.
8. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, 3 изд., – М., 1981.
9. Арзуманов З.С. Кавитация в местных гидравлических сопротивлениях. – М.: Энергия, 1978. – 303 с.
10. Аронович Г. В., Картвелишвили Н. А., Любимцев Я. К. Гидравлический удар и уравнивательные резервуары. – М.: Наука, 1968.
11. Атавин А. А. Расчет неустановившегося течения воды в разветвленных системах речных русел или каналов. //«Динамика

- сплошной среды», - Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1975, вып. 22, с. 25 - 37.
12. Атавин А.А., Васильев О.Ф., Яненко А.П. Гидродинамические процессы в судопропускных сооружениях. – Новосибирск: ВО "Наука", 1993. – 101 с.
13. Атавин А.А., Колеватов Ю.В., Мороз А.А., Тарасевич В.В., Сабельников В.И. Математическое моделирование переходных процессов в сложных трубопроводных системах (на примере гидропривода). – раздел 1.2 в коллективной монографии «Трубопроводные системы энергетики: модели, приложения, информационные технологии» /под ред. д.т.н., проф. М.Г. Сухарева. – М.: ГУП Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000. – с.31 – 46.
14. Атавин А.А., Лаврентьев В.Л., Тарасевич В.В. Математическое моделирование сложных трубопроводных сетей // Раздел 1.1 в коллективной монографии «Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения». /Н.Н.Новицкий, Е.В.Сеннова, М.Г.Сухарев и др. - Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН. - 2000. - 273 с. 16 - 30.
15. Атавин А.А., Тарасевич В.В. Моделирование больших трубопроводных систем системами с сосредоточенными и распределенными параметрами / В сб. «Трубопроводные системы энергетики. Методы математического моделирования и оптимизации». Под ред. д.т.н. Н.Н.Новицкого. – Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН. - 2007. -259 с., с.7 - 17.
16. Атавин А.А., Тарасевич В.В. Моделирование систем с распределенными параметрами при помощи систем с сосредоточенными параметрами /В сб. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды III Международной

- конференции». Под ред.: акад. В.П. Мясникова, акад. Н.А. Кузнецова, проф. В.А. Виттиха. – Самара: Самарский научный центр РАН, 2001. – 668 с. (с. 521 - 527).
17. Атавин А. А., Тарасевич В. В. Численные методы расчета нестационарных процессов в напорных гидравлических системах. - в сб.: "Численные методы в гидравлике" (тезисы Всесоюзного симпозиума), Ленинград, ВНИИГ, 1980., с.107-108.
18. Атавин А.А., Тарасевич В.В. Численный метод расчета неустановившегося течения жидкости в сложных гидросистемах. – в сб.: «Автоматизация закрытых оросительных систем» //сб. статей. – Новочеркасск: НИМИ, 1975, т.ХVII, вып.8.
19. Бабэ Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификация моделей гидравлики. - Новосибирск: Наука, 1980. - 160 с.
20. Балышев О.А., Таиров Э.А. Анализ переходных и стационарных процессов в трубопроводных системах (теоретические и экспериментальные аспекты). – Новосибирск: Наука, 1998. – 164 с.
21. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. Изд. 2-е, доп. – М., Ижевск, 2005. – 543 с.
22. Башта Т.М. Машиностроительная гидравлика. – М.: Машиностроение, 1971. – 672 с., ил.
23. Башта Т.М., Зайченко И.З., Ермаков В.В., Хаймович Е.М. Объемные гидравлические приводы. - М.: Машиностроение, 1969.
24. Бердников В.В. Прикладная теория гидравлических цепей. – М.: Машиностроение, 1977. – 191 с., ил.
25. Бержерон Л. От гидравлического удара в трубах до разряда в электрической сети. – М.: Гостехиздат, 1964.
26. Биркгоф Г. Математический анализ кавитации. – В сб. Пер. Иностр. Статей: Механика, 1972, № 3, с. 66 – 68.

- 27.Блохин В.И. Расчет гидравлического удара в напорных оросительных сетях и системах сельскохозяйственного водоснабжения [Текст]: (Курс лекций) / Новочеркасск : НИМИ, 1973. - 95 с., черт.
- 28.Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. /РАН, Сиб. отделение, Ин-т геологии, геофизики и минералогии, Ин-т математики. - Новосибирск, 1994. - 183 с.
- 29.Бондарев Э.А., Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф. и др. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа. – Новосибирск: Наука, 1988.
- 30.Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++. 2-е изд./пер. с англ. – М.: «Издательство Бином», СПб: «Невский диалект», 2000. – 500 с., илл.
- 31.Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. – М.: Мир, 1983. – 136 с., ил.
- 32.Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. - М.: Мир, 1973. - 738 с.
- 33.Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М.: Наука, 1972.
- 34.Василенко Е.Г., Косовцев О.В., Павлов Б.И. Динамика системы «насос – трубопровод – устройства». Алгоритмы анализа и синтеза механизмов. – М.: Наука, 1977, с. 89 – 113.
- 35.Васильев О. Ф, Воеводин А. Ф. О газотермодинамическом расчете потоков в простых и сложных трубопроводах (постановка задачи). - Изв. СО АН СССР, сер. техн. наук, 1968, № 13, вып. 3.
- 36.Васильев Ю.С., Виссарионов В.И., Кубышкин Л.И. Решение гидроэнергетических задач на ЭВМ. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 160 с., ил.

- 37.Вишневский К.П. Расчет гидравлического удара с использованием ЭЦВМ. – Водоснабжение и санитарная техника, 1964, №9, с.1. – 5.
- 38.Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: Наука, 1993. - 368 с.
- 39.Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Численные методы расчета одномерных систем. – Новосибирск: Наука, 1981.
- 40.Войнов А.К. Исследование переходных процессов в гидроприводе. Изв. Сиб. отд-ния АН СССР. Сер. техн. наук. – 1968, № 3, вып. 1. - с. 118 – 123.
- 41.Волярович М.П., Гуткин А.М. Течение пластично-вязких жидкостей между двумя касательными трубами. – Журнал технической физики, т. XVI, 1949.
- 42.Воронов А. А., Ким Д. П., Лохин В. М. и др. Теория автоматического управления/под ред. акад. Воронова А.А.. В 2-х ч. – М.: Высшая школа, 1986.
- 43.Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Главн. ред. физ.-мат. лит. изд-ва «Наука», 1971. – 416 с., ил.
- 44.Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973.
- 45.Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения. /Н.Н.Новицкий, Е.В.Сеннова, М.Г.Сухарев и др. – Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН. – 2000. – 273 с.
- 46.Гидродинамические процессы в сложных трубопроводных системах /М.А.Гусейнзаде, Л.И.Другина, О.Н.Петрова, М.Ф. Степанова. – М.: Недра, 1991. – 164 с., ил.
- 47.Гийом М. Исследование и расчет гидравлических систем. - М.: Машиностроение, 1969. – 385 с.
- 48.Гликман Б.Ф. Математические модели пневмогидравлических систем. – М.: Наука, 1986. – 366 с., ил.

49. Гризодуб Ю.М. Применение теории пассивных четырехполюсников к расчету распространения колебаний давления в разветвленных гидравлических системах авиадвигателей. – Изв. ОТН АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1951, т. XI, № 2, с. 105 – 120.
50. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубах. – Казань, 1883.
51. Громов Б.Н. Волновые процессы в магистральных тепловых сетях при отключении циркуляционных насосов. – Электрические станции, 1973, № 1, с. 42-44.
52. Двухфазные потоки. Теплообмен и гидродинамика. /Под ред. Э.В. Фирсовой. – Л.: Наука, 1987.
53. Двухшерстов Г.И. Гидравлический удар в трубах некруглого сечения и потоке жидкости между упругими стенками. – Ученые записки МГУ, сер. Механика, т. II, 1948. – с. 17-76.
54. Денисов С.В. О коэффициенте трения в нестационарных течениях. – Инж.-физ. журнал, 1970, т. 18, № 1, с. 118 – 123.
55. Добринский Н.С. О динамике течения жидкости в напорных магистралях гидравлических прессов. Вестник машиностроения, 1959, № 9, с. 9 – 17.
56. Донский Б. Полные характеристики насосов и влияние коэффициента быстроходности на гидравлические переходные процессы. – Теоретические основы инженерных расчетов, Серия Д, № 4, 1961. – с. 245-260.
57. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения. - 2-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.
58. Жмудь А.Е. Гидравлический удар в гидротурбинных установках. – М.: Госэнергоиздат, 1953.

59. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. - «Бюллетень Политехнического общества», 1899, № 5. (см. также М.-Л.: ГИТТЛ, 1949, т.2, с. 3-73. )
60. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В. и др. Основы теории цепей: Учеб. для вузов /Г.В.Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В.Страхов. –5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528с.
61. Зелькин Г.Г. Нестационарные течения в местных сопротивлениях. – Минск: Высшая школа, 1981.
62. Зилке У. Трение, зависящее от частоты, при неустановившемся течении в трубопроводе. – Теоретические основы инженерных расчетов, № 1, 1968. – с.120-127.
63. Зыков А.А. Теория конечных графов. – Новосибирск: Наука, 1969.
64. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с., ил.
65. Ишмухаметов И.Т., Исаев С.Л., Лурье М.В., Макаров С.П. Трубопроводный транспорт нефтепродуктов. – М.: «Нефть и газ», 1993. – 300 с., ил.
66. Каганов З.Г. Электрические цепи с распределенными параметрами. - М.: Энергоиздат, 1990. – 248 с., ил.
67. Каганович Б.М., Меренков А.П., Балышев О.А. Элементы теории гетерогенных гидравлических цепей. - Новосибирск, Наука, Сиб. предприятие РАН, 1997. – 120 с.
68. Куракулин Е.А., Стаина Л.А. Увеличение точности расчета суммарных объёмов кавитационных полостей (каверн) в гидравлических системах при гидроударах. – Математическое моделирование, т.12, № 3, 2000. с. 121 – 127.
69. Картвелишвили Н. А. Динамика напорных трубопроводов. – М., Энергия, 1979.

- 70.Картвелишвили Н.А., Галактионов Ю.И. Идеализация сложных динамических систем. – Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 272 с.
- 71.Кисилев П.Г. Гидравлика: основы механики жидкости. – М.: Энергия, 1980. – 360 с., ил.
- 72.Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бобков В.П. Справочник по тепло-гидравлическим расчетам (ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы). – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 360 с., ил.
- 73.Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. – М.: Мир, 1974. – 687 с.
- 74.Койда Н.У., Ильина Т.П., Казимиров Е.Я., Щербо А.М. Вариационные методы гидравлических расчетов трубопроводов. – Минск: Высшая школа, 1968.
- 75.Колеватов Ю.В., Мороз А.А., Сабельников В.И., Тарасевич В.В., Медведева И.Н. Математическое моделирование работы испытательных стендов. /Сб. научных трудов Кировоградского государственного технического университета, вып.7. – Кировоград, 2000. с. 88-93.
- 76.Колеватов Ю.В., Сабельников В.И. Гидравлические и пневматические приводы систем нагружения авиационных конструкций. – Новосибирск, Издательство НПФ «Бестек-Авиа», 2002. – 219 с.
- 77.Комаров А.А. Надежность гидравлических систем. – М.: Машиностроение, 1969. – 236 с., ил.
- 78.Кондратьева Т.Ф. Предохранительные клапаны. 2-е изд. – Л.: Машиностроение ЛО, 1976. – 231 с., ил.
- 79.Коротков Б.А., Попков Е.Н. Алгоритмы имитационного моделирования переходных процессов в электрических системах. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1987. – 280 с.

- 80.Кривченко Г.И. Гидравлический удар и рациональные режимы регулирования гидроэлектростанций. – М.: Госэнергоиздат, 1951.
- 81.Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
- 82.Крылов Ю.В. Исследование гидравлического удара в разветвленной системе трубопроводов операционным методом. Сб. МВТУ им. Баумана «Некоторые задачи гидрогазодинамики». – М.: Оборонгиз, 1955.
- 83.Кузнецов Ю.Н. Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. - 296 с., ил.
- 84.Куколевский И.И. Гидравлический удар в простом трубопроводе. Сборник МВТУ им. Баумана «Гидромашиностроение», М.: Машгиз, 1949.
- 85.Кулик М. Н. Методы системного анализа в энергетических исследованиях. – Киев: Наукова Думка, 1987. - 200 с.
- 86.Курганов А.М., Федоров Н.Ф. Справочник по гидравлическим расчетам. – Л.: Стройиздат (Ленингр. отд-ние), 1973.
- 87.Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979.
- 88.Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. – М.: Энергия, 1976.
- 89.Кушнырев В.И., Лебедев В.И., Павленко В.А. Техническая термодинамика и теплопередача. – М.: Стройиздат, 1986. – 464 с., ил.
- 90.Лаврентьев В.Л., Тарасевич В.В. Исследование работы системы автоматического регулирования давления в обратной магистрали сети теплоснабжения. Известия ВУЗов, «Строительство и архитектура», № 10, 1977, с. 108 – 113.
- 91.Лаврентьев В.Л., Тарасевич В.В. Исследование работы системы рассечки потока при нестационарных режимах движения жидкости в

- сети теплоснабжения. Известия ВУЗов, «Строительство и архитектура», № 4, 1980, с. 101 - 106.
92. Лаврентьев В. Л., Тарасевич В. В. Математическое моделирование сетей теплоснабжения и технологических линий ТЭЦ и АЭС. // в сб. «Повышение эффективности производства и использования энергии в условиях Сибири (Иркутск, 1994)» – Всероссийская научно-техническая конференция – Иркутск, 1994.
93. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. - 4-е изд., стер. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 736 с.
94. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, 4 изд., М., 1988.
95. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
96. Левковский Ю.Л. Структура кавитационных течений. – Л.: Судостроение, 1977. – 248 с.
97. Леонов Е.Г., Исаев В.И. Гидроаэромеханика в бурении. – М.: Недра, 1987.
98. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 416 с.
99. Лийв У.Р. О гидравлических закономерностях при замедленном движении жидкости в напорном цилиндрическом трубопроводе. – Тр. ЛИВТ, 1965, сер. А, вып. 223.
100. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - Изд. 5-е, перераб. и доп. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 736 с.
101. Лурье М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа / Москва: Нефть и газ, 2003. – 335 с.

102. Лурье М.В., Макаров П.С. Гидравлическая локация утечек нефтепродукта на участке трубопровода. – Транспорт и хранение нефти и нефтепродуктов. – 1998, №12.
103. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1972.
104. Лямаев Б.Ф., Небольсин Г.П., Нелюбов В.А. Стационарные и нестационарные переходные процессы в сложных гидросистемах. - М.: Машиностроение, 1978.
105. Маковей Н. Гидравлика бурения. – М.: Недра, 1986.
106. Мандельштам Л. И., Лекции по теории колебаний, М., 1972.
107. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения /А.П.Меренков, Е.В.Сеннова, С.В.Сумароков и др. - Новосибирск: ВО Наука, 1992. - 407 с.
108. Матюшев И.И. Неустановившееся движение жидкости в системах гидроприводов. – Л.: Изд. ЛПИ, 1970. – 22 с., ил.
109. Мелконян Г.И. Расчет гидравлического удара, возникающего в сложной водопроводной системе. – в кн.: Автоматизация закрытых оросительных систем. – Новочеркасск, 1975, с. 106 – 112.
110. Меренков А. П., Хасилев В. Я. Теория гидравлических цепей. - М.: Наука, 1985.
111. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука, 1981.
112. Мороз А.А., Тарасевич В.В., Колеватов Ю.В., Сабельников В.И. Управление работой гидравлического привода испытательного стенда в условиях неопределенности. Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды II международной конференции. /Под ред. акад. В.П.Мясникова, акад. Н.А.Кузнецова, проф. В.А.Виттиха. – Самара: Сам. научный центр РАН, 2000, с. 410–416.

113. Мостков М.А. Гидравлический удар в гидроэлектрических станциях. – М.: ГОНТИ, 1938.
114. Мостков М.А., Башкиров А.А. Расчеты гидравлического удара. – М.: Госэнегоиздат, 1952.
115. Мостовский А.Ф. Исследования гидравлического удара в трубах при малых напорах. – Тр. МИИТ, 1929, вып. XI, с. 263 – 304.
116. Мостовщиков Г.Я., Ноговицин Б.Ф., Тарасевич В.В. Гидравлический удар в машинах для литья под давлением. – Известия ВУЗов, Машиностроение, № 3, 1976, с.126 – 130.
117. Мошнин Л.Ф., Тимофеева Е.Т. Указания по защите водоводов от гидравлического удара. – М.: 1961, - 294 с., ил.
118. Мошнин Л.Ф., Тимофеева Е.Т. Повышение давления при гидравлических ударах, сопровождающихся разрывом сплошности потока. – «Водоснабжение и санитарная техника», 1965, № 7, с. 3 – 5.
119. Мошнин Л.Ф., Обухов Л.А. Руководство по расчету средств защиты водоводов от гидравлического удара. – М.: Водгео, 1970, с. 78.
120. Мызников А.М., Файзуллин Р.Т., Уточнение коэффициентов сопротивления в сложных гидравлических сетях по результатам ограниченного числа измерений // Теплофизика и аэромеханика, Новосибирск, 2005, том 12, № 2, с. 483-486.
121. Навроцкий К.Л. Теория и проектирование гидро- и пневмоприводов. – М.: Машиностроение, 1991ю – 384 с., ил.
122. Надеев А.Г. К вопросу о возникновении пузырькового течения жидкости. – Теплоэнергетика, 1976, № 7, с. 72-74.
123. Накоряков В.Б., Соболев В.В., Шрейбер И.Р., Штивельман Б.Я. Структура и динамика гидравлического удара. – Всесоюзная конференция по проблемам гидравлической устойчивости (Тбилиси,

- 19-24 ноября, 1975): тезисы докл. – Тбилиси: изд. Тбил. Политехн. ин-та, 1975, с.94-95.
124. Нариньяни А. С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний //Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1986, №5. С. 3-28.
125. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. / Ч. I – II. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
126. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. – М.: Наука, 1981.
127. Орлов Ю.М. Некоторые особенности учета сжимаемости жидкости при анализе динамики гидравлических и гидромеханических систем. В сб. «Сборник научных трудов. Пермский политехнический ин-т». – Пермь, 1973, № 132, с. 7 – 17.
128. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989. - 367 с., ил.
129. Перник А.Д. Проблемы кавитации. – Л.: Судостроение, 1966, - 439 с.
130. Пирсол И. Кавитация. – М.: Мир, 1975. – 95 с.
131. Попов В. П. Основы теории цепей. / М.: Высш. шк., 1985.
132. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. – М.: Машиностроение, 1982. – 239 с., ил.
133. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с., ил.
134. Попов Д.Н., Кравченко В.Г. Исследование неустановившегося движения жидкости при переходных процессах в короткой трубе. – Вестник машиностроения, 1974, № 6, с.7-10.
135. Рабинович М.И. Методика расчета на ЭВМ неустановившегося движения в сложных линеаризованных гидросистемах с

- распределенными и сосредоточенными параметрами. В сб. «Механика машин», вып. 49. – М.: Наука, 1975, с. 22 – 31.
136. Рахматуллин Ш.И. Кавитация в гидравлических системах магистральных нефтепроводов. – М.: Недра, 1986. – 165 с.
137. Рождественский Б. И., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978.
138. Розенберг Г.Д. Экспериментальная проверка гипотезы квазистационарности при неустановившемся движении жидкости по трубам. – В сб. «Вопросы гидродинамики вязкой и вязкопластичной жидкости» – Рязань: 1976, с. 61 – 70.
139. Рождественский В.В. Кавитация. – Л.: Судостроение, 1977. – 248 с.
140. Ротач В. Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. – М.: Энергия, 1973.
141. Рыжков А.Н. Методика расчета гидравлического удара с учетом срабатывания обратных клапанов. Тр. ВНИИ водоснабжения, канализации, гидротехнических сооружений и инж. гидрологии, М.: 1976, вып. 60, с.135 – 140.
142. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. – М.: Издательство иностр. литературы, 1963.
143. Ситников Б.Т., Матвеев И.Б. Расчет и исследование предохранительных и переливных клапанов. – М.: Машиностроение, 1972. – 129 с., ил.
144. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы – "Мир" (1971), 560 с.
145. Смирнов Д. Н., Зубов Л. Б. Гидравлический удар в напорных водоводах. - М.: Стройиздат, 1975. – 125с.
146. Содномова С.Д., Меклер В.М., Сальман В.И., Лифшиц И.М. Экспериментальные исследования нестационарных гидравлических

- режимов в водяных тепловых сетях при вскипании теплоносителя. – Теплоэнергетика, 1978, № 1, с. 88 – 90.
147. Справочник по гидравлическим расчетам /под ред. П.Г.Киселева. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Энергия, 1972.
148. Сурин А.А. Гидравлический удар в водопроводах и борьба с ним. – М.: Трансжелдориздат, 1946.
149. Сухарев М.Г., Карасевич А.М. Технологический расчет и обеспечение надежности газо- и нефтепроводов. – М.: ГУП Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина, 2000. – 272 с.
150. Сырицын Т.А. Эксплуатация и надежность гидро- и пневмоприводов. - М.: Машиностроение, 1990. - 248 с., ил.
151. Тарасевич В.В. Распространение и трансформация возмущений при гидравлическом ударе, сопровождающемся кавитацией. – Акустика неоднородных сред. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО РАН, 1997, вып. 112, с. 226 – 234.
152. Тарасевич В. В. Решение задач об одномерных напорных течениях в гидравлических сетях. // Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. - Новосибирск: Вычислительный Центр СО АН СССР, 1980, с.186-188.
153. Тарасевич В. В. Численный метод решения задач о неустановившемся движении жидкости в сложной системе трубопроводов. – "Динамика сплошной среды" – Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1970, вып.5, с.72-78.
154. Тарасевич В.В. Метод контрольных точек для расчета гидравлического удара, сопровождающегося кавитацией потока жидкости. – Труды НИМИ, т. XVII, вып.5. - Новочеркасск: НИМИ, 1975, с.47 – 60.

155. Тарасевич В.В. Численный метод расчета гидравлического удара в напорных сетях по явной разностной схеме. – В сб.: "Создание автоматизированных систем проектирования закрытых оросительных сетей". – М.: Росгипроводхоз, 1977, с.79-90.
156. Тарасевич В. В. Использование явно-неявной схемы для расчета нестационарных течений жидкости в напорных гидравлических системах. // Всесоюзный симпозиум «Численные методы в гидравлике» (Телави, Груз. ССР, 14-18 апреля 1980) – Ленинград: ВНИИГ, 1980.
157. Тарасевич В. В. О максимальном давлении при гидравлическом ударе, сопровождающемся разрывом сплошности потока. – “Гидротехническое строительство”, № 8. 1980, с.15-18.
158. Тарасевич В. В. Расчет течений двухфазных смесей в системах трубопроводов. // «Вестник Челябинского государственного университета», т.6, № 1, 1997 г., стр. 134-147. Изд. ЧГУ, ISSN: 1994-2796.
159. Тарасевич, В.В. Расчет распространения и трансформации возмущений в системе технологических трубопроводов АЭС. "Известия ВУЗов. Строительство и Архитектура", № 7, 2016, с. 92 – 98.
160. Тарасевич В.В., Епишева А.К. Математическое моделирование аварийных ситуаций на подводных трубопроводных переходах. Известия ВУЗов. Строительство, № 5, 2007. с.42 – 48.
161. Тарасевич В.В., Колеватов Ю.В., Сабельников В.И. Расчет нестационарных режимов работы гидроприводов. – тезисы докл. На VIII Всесоюзном симпозиуме "Проблемы автоматизации в прочностном эксперименте" (Новосибирск, 11-13 июня 1990г.). – Новосибирск: СибНИА, 1990.

162. Тарасевич В.В., Колеватов Ю.В., Мороз А.А., Сабельников В.И. Математическое моделирование переходных процессов в сложных трубопроводных системах (на примере гидропривода). //В кн. «Трубопроводные системы энергетики: модели, приложения, информационные технологии» – М.: ГУП Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000. – с.31 – 46.
163. Тарасевич В.В., Ли А.К. Эффективность обратных клапанов при аварийных режимах канализационного коллектора. Известия вузов. Строительство. 2011 № 10, с. 60-67
164. Тарасевич В.В., Мороз А.А., Ли А.К.. Квазистационарный подход к описанию течения через местное сопротивление, "Известия ВУЗов. Строительство и Архитектура", № 8 - 9, 2011, с. 104 - 111.
165. Тарасевич В.В., Шероносова Т.Ю. Имитационное моделирование управляющих воздействий в сложных трубопроводных системах. Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды международной конференции. /Под ред. акад. В.П.Мясникова, акад. Н.А.Кузнецова, проф. В.А.Виттиха. - Самара: Сам. научный центр РАН, 1999, с. 360-365.
166. Тарасевич В.В., Шероносова Т.Ю. Моделирование работы системы автоматического регулирования давления в обратной магистрали сети теплоснабжения. Изв. ВУЗов. Строительство, 1999, № 8, с. 70 - 74.
167. Тарко Л.М. Волновые процессы в трубопроводах гидромеханизмов. – М.: Машгиз, 1963. – 183 с., ил.
168. Тевяшев А. Д., Гусарова И. Г. Метод расчета переходных процессов в газопроводных сетях высокого давления с активными элементами. // «АСУ и приборы автоматизики», респ. межвед. научно-техн. сб., вып. 95, Харьков, 1990, с. 33-39.

169. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа. /Бондарев Э. А., Васильев О. Ф, Воеводин А. Ф и др. – Новосибирск: Наука, 1988. – 272 с.
170. Техническая термодинамика. /Под ред. В.И.Крутова. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 1981. – 439 с., ил.
171. Трубопроводные системы энергетики: модели, приложения, информационные технологии /Атавин А.А., Карасевич А.М., Сухарев М.Г. и др. – М.: ГУП Издательство «Нефть и газ» РГУ Нефти и газа им. И.М.Губкина, 2000. – 320 с.
172. Трубопроводные системы энергетики: управление развитием и функционированием /Н.Н.Новицкий, Е.В.Сеннова, М.Г.Сухарев и др. – Новосибирск: Наука, 2004. – 461 с.
173. Уэйлер М. Е., Стритер В. А, Ларсен П. С. Исследование влияния кавитационных пузырьков на потерю количества движения в трубе при неустановившемся течении. – “Теоретические основы инженерных расчетов”, т.93, № 1, 1971.
174. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. – М.: Мир, 1972, - 440 с.
175. Уоллес Дж., Ли Вен-Синь. Гидравлический удар, возникающий вследствие отрыва столба жидкости. – Теоретические основы инженерных расчетов, серия Д, 1972, с.66-72.
176. Файзуллин Р.Т. О решении нелинейных алгебраических систем гидравлики. // Сибирский журнал индустриальной математики, 1999, Новосибирск:ИМ СО РАН, том 2,№ 2,с. 176-184.
177. Файзуллин Р.Т.Гидравлический расчет и оптимизация в больших гидросистемах. // Тезисы докладов VIII Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Пермь, август 2001, С.479.

178. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Фейнмановские лекции по физике, 3 изд., т. 1 – 4, – М., 1977.
179. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. – М.: Энергоиздат, 1981.
180. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1978. – 300 с.
181. Христианович С.А. Неустановившееся движение в каналах и реках. – в кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: 1938, с.15 – 154, ил.
182. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Недра, 1975.
183. Черных Г.А. Ударные явления в магистральных гидравлического привода. В сб. «Гидравлика и водоснабжение». – Хабаровск: 1974, с. 148 – 158.
184. Шищенко Р.И., Есьман Б.И. Практическая гидравлика в бурении. – М.: Недра, 1966.
185. Allievi L. Theoria generae del moto perturbato dell' acqua nei tubi in pressione. – Milan, 1903. (См. также “The Theory of Waterhammer”, Am. Soc. Civil. Eng., 1925).
186. Angus, R.W. Water hammer in pipes, including those supplied by centrifugal pumps: Graphical treatment. – Proc. Mechanical Engineers, 1937, v. 136, pp. 245 – 331.
187. Atavin A.A., Tarasevich V.V. The Numerical Modeling of Flows in the Complex Pipe Networks. In: Proc. of IAHR XXVIII Biennial Congress, 22-27 August 1999 in Graz, Austria. Abstract Volume. Papers on CD-Rom, Graz, 1999, 110.
188. Atavin, A.A. and Tarasevich, V.V. Simulation of Unsteady Processes in piping systems by the systems with lumped parameters. Proceedings of XXIX IAHR Congress, Theme D – Hydraulics of Rivers,

- Water Works and Machinery, vol.II. – Tsinghua University Press, Beijing 100084, China, 2001, pp. 499 – 504 .
189. Atavin A.A., Vasiliev O.F., Moroz A.A. and Tarasevich V.V. Transients in the Hydro-drive of Ship Elevator. Proc. of 4th International Conference on Hydrosience & Engineering – ICHE 2000, Seoul, Korea, September 26–29, 2000.
190. Bergant A., Simpson A.R., Vitkovsky J. Developments in unsteady pipe flow friction modeling. – Journal of Hydraulic Research, 2001, vol. 39, № 3, pp. 249 – 257.
191. Bungazem M.B., Anderson A. Problems of simple models for damping in unsteady flow. – Proc. Int. Conf. on Pressure Surges and Fluid Transients, 1996, BHR Group, Harrogate, England, pp.537 – 548.
192. Burmann, W. Water Hammer in Coaxial Pipe Systems. – Journal of the Hydraulics Division, Vol. 101, No. 6, June 1975, pp. 699-715.
193. Chaudhry, M.H. Applied hydraulic transients. – Van Nostrand Reinhold: New York, 1987.
194. Combes G., Zaoui J. Analyse des erreurs introduites par l'utilisation pratique de la methode des caracteristiques dans le calcul des coups de belier, Houille Blanche, 1967, № 2.
195. Ernst W. Oil hydraulic power and its industrial applications. – 2nd ed., NY and others. McGraw Hill, XI, 1960. (русский перевод: Эрнст В. Гидропривод и его промышленное применение. – М.: Машгиз, 1963. - 492 с., 76 ил.)
196. Fencil V. Sources of control and hydraulic pressure shocks. – Hydr. And Pneum., 1976, 29, № 5, pp. 80 – 81
197. Jaeger, D. Théorie générale du coup de bélier (General theory of water hammer). – Le Génie Civil, 1933, vol. 103, pp. 612 – 616.
198. Jaeger, D. Über eine allgemeine graphische Berechnungsmethode der Druckstöße in Rohrleitungen (On graphical method for water

- hammer in pipelines). – *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, 1935, vol. 30, pp. 202-203.
199. Kalkwijk G.P.Jh., Kranenburg C. Cavitation in horizontal pipelines due to water-hammer. *Gour? Of Hudr.? Div., Proc. ASCE., HY.10*, v.97, 1971.
200. Kalkwijk G.P.Th., Kranenburg C., Vrengdenhil C.B., de Vries A.H. Cavitation caused by water-hammer in horizontal pipelines. - ?
201. Kolevatov Yu. V., Moroz A.A., Sabel'nikov V.I., Tarasevich V.V. Transients in Machinery Hydraulics. Proceedings of XXIX IAHR Congress, Theme D – Hydraulics of Rivers, Water Works and Machinery, vol.II. – Tsinghua University Press, Beijing 100084, China, 2001, pp. 657 – 662.
202. Mayoh B. Constraint Programming and Artificial Intelligence. In: *Constraint Programming*. Springer-Verlag, 1993. NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences, Vol.131, pp.17-50.
203. Michaud, J. Coup de bélier dans les conduits. – *Bulletin de la Société Vaudoise des Ingénieurs et des Architectes*, 1878, vol. 4, pp. 56 – 64/
204. Michaud, J. Intensité des coups de bélier dans les conduits d'eau (Intensity of water hammer in water pipelines). – *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, 1903, v.29, pp. 35-38.
205. Nino M., Sawamoto M., Takasu S. Study on transition to turbulence and frictional coefficient in an oscillatory pipe flow. *Transaction of JSCE*, 1977, v.9, pp. 282 – 284.
206. Pezzinga G. Quazy-2D model for unsteady flow in pipe networks. – *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 1999, v. 125, # 7, pp. 676 – 685.

207. Podryabinkin E., Tarasevich V., May R. and Ahmed R. Modelling and Evaluating Surge Pressure while Tripping in a Borehole. "Oil Gas European Magazine, March, 2014, volume 40, No 1. pp. 21 - 23.
208. Podryabinkin, Evgeny, Tarasevich, Vladimir, May, Roland and Bocharov, Oleg. "Modelling of Pressure Fluctuations in a Wellbore While Tripping" – European Oil and Gas journal, March, 2016, 03. ), pp. OG 14 – OG 16.
209. Safwat H.H., Prinse K.A.F. Experimental study of the influence of obstruction devices on hydraulic transients. – Delft Progr. Rept., 1975, № 3, pp. 77 – 83.
210. Safwat H.H., van der Polder J. Friction-frequency dependence for oscillatory flows in circular pipes. – Journal of the Hydraulic Division, ASCE, 1973, v. 99, pp. 1933 – 1945.
211. Sattler H., Strohmer F. Computer solution to water-hammer problems using the method of characteristics. – Water Power, 1974, 26, № 9, pp. 322 – 327.
212. Schohl G.A. Improved approximate method for simulating frequency-depended friction in transient laminar flow. – Journal of Fluids Engineering, ASME, 1993, v.115, #3, pp. 420 – 424.
213. Schnyder, O. Druckstöße in Pumpenstreigleitungen (Water hammer in pumping pipelines). – Schweizerischer Bauzeitung, 1929, vol. 94, p. 271 – 273.
214. Schnyder, O. Über Druckstöße in Rohrleitungen (On water hammer in pipelines). – Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1932, vol. 27, pp.49 – 54.
215. Schnyder, O. Über Druckstöße in verzweigten Leitungen mit besonderer Berücksichtigung von Wasserschlossanlagen (On water hammer in bifurcated pipelines with particular consideration of surge tanks). – Wasserkraft und Wasserwirtschaft, 1935, vol. 30, pp.133 – 142.

216. Sheronosova, T.Yu. and Tarasevich, V.V. The Simulation of Transients in Hydro-Automatic Systems under Flow Control. Water Industry Systems: modelling and optimization applications (Eds. D.Savic, G.Walters), vol.1, Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 1999. p.425-436.
217. Sharp, B.B. Water hammer, problems and solutions. Arnold, London, 1981.
218. Streeter, V.L. and Wylie, E.B., Hydraulic Transients. Mc Graw-Hill, N.Y., 1968.
219. Strickler, A. Theorie des Wasserstosses. – Schweizerische Bauzeitung, 1914, vol. 63, p. 357.
220. Takahashi K., Jkeo S., Takahashi Y. Transient phenomena caused by directional control valve in a hydraulic pipeline. – Bull. ASME, 1973, 16, №102, pp.1911-1916.
221. Tarasevich V.V. The Simulation and Mathematical Modelling of the Complex Pipe Systems. // 5-th (IMACS) World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics (Berlin, August 1997). Proceedings, vol. 3. (Computational Physics, Chemistry and Biology), p.p. 115-120. Editor by Achim Sydow.
222. Telerman V.V., Sidorov V.A., Ushakov D.M. Problem Solving in the Object-Oriented Technological Environment NeMo+ // Lecture Notes in Computer Science, 1181, Springer, 1996.- P. 91 - 100.
223. Tijsseling, A.S. and Bergant, A. Meshless Computation of Water Hammer. Proc. 2nd IAHR International Meeting of the Workgroup on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems, 2007, pp. 65 – 76.
224. Trikha A.K. An efficient method for simulating frequency-depended friction in transient liquid flow. – Journal of Fluids Engineering, ASME, 1975, v.97, # 1, pp. 97 – 105.

225. Vardy A.E., Brown J.M.B. Transient, turbulent, smooth pipe flow. – Journal of Hydraulic Research, IAHR, 1995, v. 33, #4, pp. 435 – 456.
226. Vennatro B. Unsteady friction in pipelines. – Proc. XVIII IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and cavitation, Valencia, Spain, 1996, vol.2, pp.819 – 826.
227. Wood D.J. Funk J.E. A boundary-layer theory for transient viscous losses in turbulent flow. – Journal of Basic Engineering, ASME, 1970, v. 92, # 4, pp. 865 – 873.
228. Zagorulko Yu. A., Popov I. G. Object-Oriented Language for Knowledge Representation Using Dynamic Set of Constraints. // Knowledge-Based Software Engineering, P.Navrat, H.Ueno (eds). -(Proc. 3rd Joint Conf., Smolenice, Slovakia). -Amsterdam: IOSPess, 1998. - P.124-131
229. Zaruba, J. Water hammer in pipe-line systems /Translated from the Czech manuscript. Elsevier, Amsterdam – London – New York – Tokyo, 1993. – pp. 362.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Справка о внедрении от НТП «Трубопровод»
2. Справка о внедрении от ФГУП СибНИА
3. Справка о внедрении в учебный процесс НГАСУ
4. Справка о внедрении в учебный процесс РГУ

Общество с ограниченной  
ответственностью  
“Научно-техническое  
предприятие Трубопровод”



Piping Systems  
research & engineering Co  
“TRUBOPROVOD”

(ООО «НТП Трубопровод»)

<http://www.truboprovod.ru>  
E-mail: [info@truboprovod.ru](mailto:info@truboprovod.ru)

(NTP TRUBOPROVOD)

Плеханова ул., 7,  
Москва, 111141, Россия  
Тел.: (495) 225-94-35; 741-59-41  
Факс: (495) 368-50-65



Plekhanova Str., 7,  
Moscow, 111141, Russia  
Tel: (495) 225-94-35; 741-59-41  
Fax: (495) 368-50-65

ОКПО 16427522, ОГРН 1027700208326, ИНН 7706076702, КПП 772001001

24.05.2017 № A-487

УТВЕРЖДАЮ



Директор ООО «НТП Трубопровод»  
Кандидат технических наук  
А.З. Миркин  
«24» мая 2017 г.

#### СПРАВКА

о внедрении результатов

докторской диссертационной работы В.В. Тарасевича  
«РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ»

Результаты диссертационной работы Тарасевича Владимира Владимировича внедрены в практику деятельности ООО «НТП Трубопровод». Разработанные в диссертации

- Математическая постановка в общем виде задачи о гидравлическом ударе в сложной трубопроводной системе;
- Семейство методов расчета на основе схем бегущего счета для быстропотекающих и плавно протекающих процессов;
- Результаты исследований гидравлического удара, сопровождающегося разрывом сплошности потока;

легли в основу модуля расчета гидравлического удара «Гидроудар» программы «Гидросистема», разработанной ООО «НТП Трубопровод» и ставшей одной из ведущих и наиболее популярных отечественных программ гидравлического и теплового расчета трубопроводов.

Владимир Владимирович Тарасевич в сотрудничестве с коллективом специалистов ООО «НТП Трубопровод» разработал расчетную часть модуля «Гидроудар», реализовав в нем описанную в диссертации общую математическую постановку задачи расчета

гидроудара как смешанной задачи для определенных на графе гиперболических дифференциальных уравнений гидравлического удара, с возможностью расчета трубопроводных сетей произвольной структуры. Расчет был реализован с использованием инвариантов Римана на основе явной схемы бегущего счета, которая показала свою эффективность при эксплуатации модуля. При программировании модуля был использован современный объектно-ориентированный подход.

Разработанный модуль значительно расширил расчетные возможности программы «Гидросистема» при использовании как самим ООО «НТП Трубопровод», так и широким кругом пользователей программы. К настоящему моменту модуль «Гидроудар» лицензирован и используется 34 организациями России, Казахстана и Украины (список пользователей прилагается). Он также с 2015 года используется в учебном процессе на кафедре проектирования и эксплуатации газонефтепроводов РГУ Нефти и Газа им. И.М. Губкина (учебный класс на 40 рабочих мест).

В 2016 году в рамках проекта модернизации модуля «Гидроудар» с участием диссертанта была разработана и передается пользователям программы новая версия модуля, реализующая расчет гидравлического удара с использованием предложенных в диссертации методов математического моделирования кавитации, включая учет мелкопузырьковой кавитации и схлопывания кавитационных каверн. Работа над усовершенствованием учета кавитации в модуле «Гидроудар» на основе научных разработок диссертанта продолжается.

Внедрение результатов научных исследований Тарасевича В.В. позволило ООО «НТП Трубопровод» открыть новое направление деятельности – разработка программного обеспечения и оказание расчетных услуг в области расчета и моделирования неустановившихся переходных гидравлических процессов в сложных трубопроводных системах – имеющее важнейшее значение для повышения надежности и безопасности разнообразных видов трубопроводов.

Заместитель директора ООО «НТП Трубопровод» по научной работе

Кандидат физико-математических наук



Л.Б. Корельштейн

Руководитель проекта разработки программы «Гидросистема», Главный специалист

Кандидат технических наук



Е.Ф. Юдовина

Общество с ограниченной  
ответственностью  
"Научно-техническое  
предприятие Трубопровод"

(ООО "НТП Трубопровод")

Плеханова ул., 7,  
Москва, 111141, Россия  
Тел.: (495) 225-94-35; 741-59-41  
Факс: (495) 368-50-65



<http://www.truboprovod.ru>  
E-mail: [info@truboprovod.ru](mailto:info@truboprovod.ru)



Piping Systems  
research & engineering Co  
"TRUBOPROVOD"

(NTP TRUBOPROVOD)

Plekhanova Str., 7,  
Moscow, 111141, Russia  
Tel: (495) 225-94-35; 741-59-41  
Fax: (495) 368-50-65

ОКПО 16427522, ОГРН 1027700208326, ИНН 7706076702, КПП 772001001

ПРИЛОЖЕНИЕ  
к справке о внедрении результатов  
докторской диссертационной работы В.В. Тарасевича  
«Развитие теории и методов расчета  
гидродинамических процессов  
в напорных трубопроводных системах»

Список пользователей модуля «Гидроудар» программы «Гидросистема»  
(коммерческая версия)

№ п/п	Наименование	Город	Web-сайт	Число копий
1	ЗАО Фирма "ТЭПИИЖИНИРИНГ"	Москва	<a href="http://www.tepin.ru/">http://www.tepin.ru/</a>	1
2	ОАО "НИПИГазпереработка"	Краснодар	<a href="http://nipigas.ru/">http://nipigas.ru/</a>	1
3	АО "Лонас Технологии"	Санкт-Петербург	<a href="http://www.lonas.ru/">http://www.lonas.ru/</a>	2
4	ОАО Щекиноазот	Щекино Тульской обл.	<a href="http://n-azot.ru/">http://n-azot.ru/</a>	1
5	ООО "ПСК" СИТИ-Инжиниринг"	Санкт-Петербург		1
6	ФГБОУ ВПО УГТУ	Ухта	<a href="http://www.ugtu.net/">http://www.ugtu.net/</a>	1
7	АО «Каспийский Трубопроводный Консорциум-Р»	Москва	<a href="http://www.cpc.ru">http://www.cpc.ru</a>	2
8	ООО «Ленгипронефтехим»	Санкт-Петербург	<a href="http://www.lgnch.spb.ru/">http://www.lgnch.spb.ru/</a>	9
9	ООО "ЛУКОЙЛ-ТРАНС"	Москва	<a href="http://lukoil-trans.lukoil.ru/">http://lukoil-trans.lukoil.ru/</a>	1
10	ООО Югтерминалпроект	Москва		1
11	АО "ВНИИ Галургии"	Санкт-Петербург	<a href="http://vniigalurgy.ru/">http://vniigalurgy.ru/</a>	1
12	АО НИПИ "Каспиймунайгаз"	Атырау (Казахстан)	<a href="http://www.nipi.cmg.kz/">http://www.nipi.cmg.kz/</a>	5

№ п/п	Наименование	Город	Web-сайт	Число копий
13	ЗАО "ГТ Морстрой"	Санкт-Петербург	<a href="http://www.gtmorstroy.com">http://www.gtmorstroy.com</a>	1
14	ОАО "Силовые машины"	Санкт-Петербург	<a href="http://www.power-m.ru/">http://www.power-m.ru/</a>	2
15	ООО "НЕФТЕГАЗПРОЕКТ"	Ставрополь		1
16	ООО "НИПИ нефти и газа "Петон"	Уфа	<a href="http://peton.ru/">http://peton.ru/</a>	2
17	ОАО "НИИК"	Дзержинск	<a href="http://niik.ru/">http://niik.ru/</a>	3
18	АО Ангарскнефтехимпроект	Ангарск	<a href="http://anhp.ru/">http://anhp.ru/</a>	1
19	ООО "Терра-Юг"	Краснодар	<a href="http://terra-yug.ru/">http://terra-yug.ru/</a>	1
20	АО "ГМС Нефтемаш"	Тюмень	<a href="http://hms-neftemash.ru/">http://hms-neftemash.ru/</a>	2
21	ГП «Гипрококс»	Харьков, Украина	<a href="http://giprokoks.com/">http://giprokoks.com/</a>	1
22	ООО "Коксохиммонтаж-проект"	Москва	<a href="http://kxm-p.ru">http://kxm-p.ru</a>	1
23	ООО НПП ОЗНА-Инжиниринг	Уфа	<a href="http://ozna.ru/company/structure/ozna_engineering.php">http://ozna.ru/company/structure/ozna_engineering.php</a>	1
24	ООО "НПП "Спецгеопарк"	Москва	<a href="http://www.specgeopark.ru/">http://www.specgeopark.ru/</a>	1
25	АО "Каражанбасмунай"	Актау (Казахстан)	<a href="http://www.kbm.kz/">http://www.kbm.kz/</a>	2
26	ОАО НИУИФ	Череповец	<a href="http://www.niulf.ru/">http://www.niulf.ru/</a>	1
27	АО «Звезда-Энергетика»	Санкт-Петербург	<a href="http://www.energostar.com/">http://www.energostar.com/</a>	1
28	ООО "Нефтехиминжиниринг"	Рязань		1
29	АО «Институт ГИДРОПРОЕКТ»	Москва	<a href="http://www.mhp.rushydro.ru/">http://www.mhp.rushydro.ru/</a>	2
30	ООО "Салаватнефтехимпроект"	Салават	<a href="http://www.snhpro.ru/">http://www.snhpro.ru/</a>	1
31	ООО "РНХП"	Ростов-на-Дону	<a href="http://www.rndrnhp.com/">http://www.rndrnhp.com/</a>	1
32	ООО Ремонтпроект	Москва	<a href="https://www.mos-rep.ru/">https://www.mos-rep.ru/</a>	2
33	ООО "ГрандЭкспертИнжиниринг"	Краснодар		1
34	ОАО Сибнефтетранспроект	Омск	<a href="https://www.sntp.ru/">https://www.sntp.ru/</a>	1
	<b>ВСЕГО МЕСТ</b>			<b>56</b>

Заместитель директора ООО «НТП Трубопровод» по научной работе  
Кандидат физико-математических наук



Л.Б. Корельштейн



**Федеральное государственное унитарное предприятие  
«Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С. А. Чаплыгина»  
(ФГУП «СибНИА им. С. А. Чаплыгина»)**

Ползунова ул., д. 21, г. Новосибирск, 630051  
Тел: (383) 279-01-56  
Факс: (383) 227-88-77  
E-mail: sibnia@sibnia.ru, http://www.sibnia.ru

ОКПО 07541511, ОГРН 1025400530836, ИНН/КПП 5401101598/540101001  
р/с 40502610944080100010 в Сибирском банке СБ РФ г. Новосибирск  
к/с 30101810500000000641  
БИК 045004641

30.05.2017 № - 22

На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Научный руководитель института,

д.т.н., профессор

А.Н. Серьезнов

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 г.

### СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ

Выдана Тарасевичу Владимиру Владимировичу для предоставления в диссертационный Совет, свидетельствующая о том, что результаты докторской диссертации «Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах» внедрены в практическую деятельность ФГУП «Сибирский научно-исследовательский институт авиации имени С. А. Чаплыгина» (ФГУП «СибНИА им. С. А. Чаплыгина»).

Разработанные В.В. Тарасевичем математические модели гидропривода авиационного испытательного стенда и различного оборудования, методика расчёта и соответствующее программное обеспечение были использованы для расчетов различных штатных и нештатных режимов работа стенда, что позволило усовершенствовать конструкцию и компоновку стенда.

Для проверки степени достоверности результатов расчетов, силами СибНИА был в 2002 годах проведён натурный эксперимент. Сопоставление экспериментальных данных и результатов расчетов показало хорошую степень согласования и подтвердило достоверность применяемых моделей и методов расчёта. Результаты были опубликованы в открытой печати.

Внедрение результатов работы В.В. Тарасевича способствовало увеличению надёжности и эффективности работы авиационных испытательных стендов.

Начальник отдела, к.т.н.

Ю.В. Колеватов

Ведущий научный сотрудник,  
к.т.н., доцент

В.И. Сабельников

S. A. CHAPLYGIN SIBERIAN AERONAUTICAL RESEARCH INSTITUTE

21, Polzunov St., Novosibirsk-51, 630051, Russia Telephone: 279-01-56 Fax: 227-88-77 E-mail: sibnia@sibnia.ru http://www.sibnia.ru

Министерство образования и науки Российской Федерации  
 федеральное государственное бюджетное образовательное  
 учреждение высшего образования  
**«Российский государственный университет  
 нефти и газа (национальный исследовательский  
 университет) имени И.М. Губкина»**  
 (РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина)



119991, г. Москва, Ленинский просп., д. 65, корп. 1  
 Телефон: (499) 507-88-88 (многоканальный); факс: (499) 507-88-77  
 E-mail: [com@gubkin.ru](mailto:com@gubkin.ru); <http://www.gubkin.ru>  
 ОКПО 02066612; ОГРН 1027739073645  
 ИНН/КПП 7736093127/773601001

19 декабря 2016 № 305/9330  
 на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

Ведущему научному  
 сотруднику ИФ ИВЭП СО РАН  
 В.В. Тарасевичу для  
 предоставления в  
 диссертационный Совет

**СПРАВКА**  
**о внедрении результатов**  
**докторской диссертационной работы В.В. Тарасевича**  
**«РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА**  
**ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**  
**В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ»**

РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина подтверждает, что результаты диссертационной работы В.В.Тарасевича, реализованные в программном модуле расчета гидравлического удара программы «Гидросистема», установленной на кафедре проектирования и эксплуатации газонефтепроводов, активно используются в учебном процессе по направлению подготовки бакалавров - 21.03.01 "Нефтегазовое дело", профиль – «Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта и хранения нефти, газа и продуктов переработки» и по направлению подготовки магистров - 21.04.01 "Нефтегазовое дело", магистерские программы – «Трубопроводный транспорт углеводородов», «Проектирование и реконструкция объектов магистральных нефте- и нефтепродуктопроводов».

Компьютерная программа «Гидросистема» и в том числе программный модуль, разработанный на основе результатов диссертационной работы В.В.Тарасевича, установлена на кафедре проектирования и эксплуатации газонефтепроводов в трех компьютерных классах и используется кафедрой при проведении лабораторных занятий по дисциплине «Технологические процессы трубопроводного транспорта нефти и газа», а также при подготовке бакалаврами и магистрами своих выпускных работ.

Проректор по учебной работе

 В.Н.Кошелев



Исполнитель: заведующий кафедрой П и ЭГНП  
 д.т.н. С.А.Сарданашвили  
 Телефон: 8 (499) 507-88-36  
 E-mail: [Sardnashvili.S@gubkin.ru](mailto:Sardnashvili.S@gubkin.ru)

